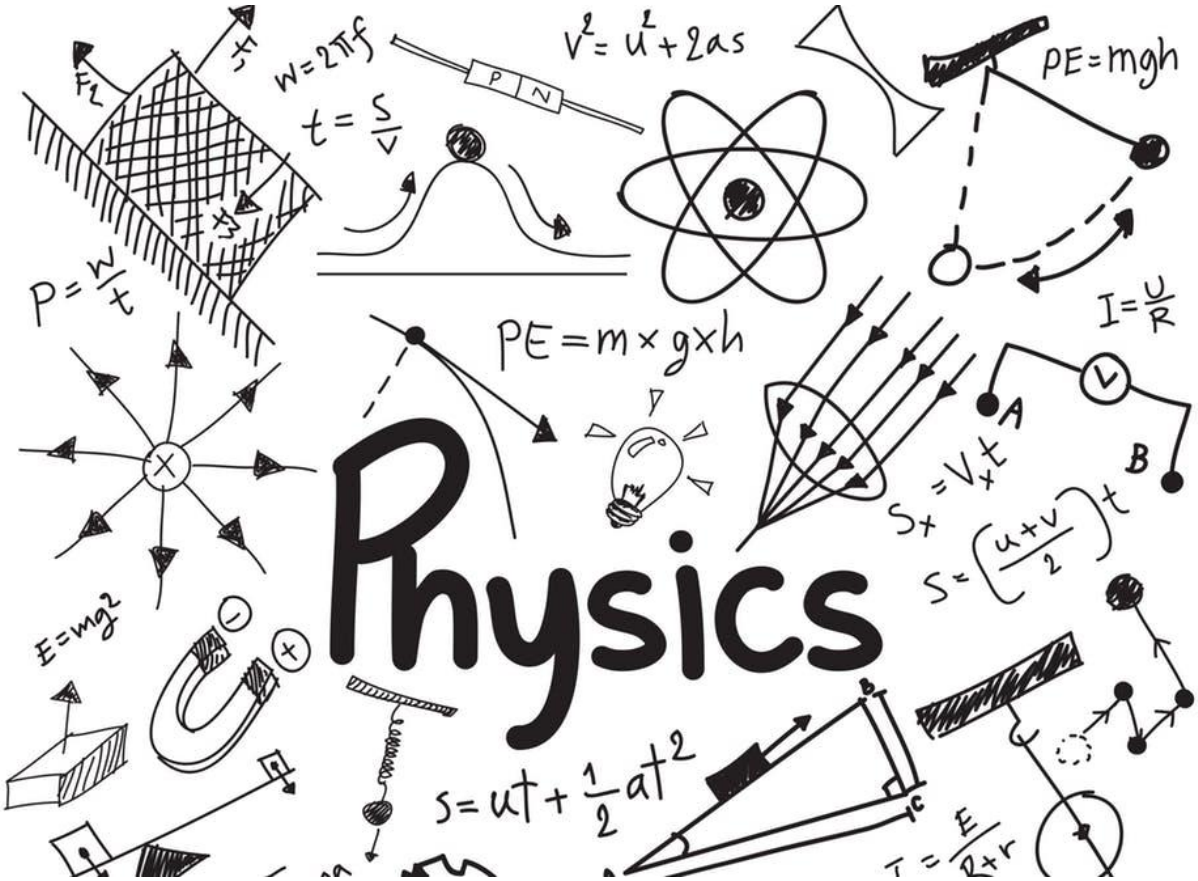
XXIV FEDERALNO TAKMIČENJE IZ FIZIKE

2019



Društvo fizičara u FBiH
06.04.2019

Organizator: Društvo fizičara u FBiH

Domaćin: Mašinski fakultet Univerziteta u Zenici

Zadatke pripremili:

Grupa A 1. Dino Habibović, supervizor
2. Nermedin Džeković
3. Dinno Koluh
4. Kerim Hrvat

Grupa B 1. Senad Isaković, supervizor
2. Kenan Selman
3. Tarik Čorbo
4. Amra Salčinović Fetić

Grupa C 1. Mirsad Tunja, supervizor
2. Naida Dedić
3. Emir Baručija
4. Kenan Saračević

Grupa D 1. Dženan Devedžić, supervizor
2. Benjamin Fetić

Organizacioni odbor:

1. Jasmina Dizdarević
2. Dijana Dujak
3. Senija Krličević
4. Arnela Selimović
5. Željko Stapić

Posebno se zahvljajujemo se našim sponzorima: Ministarstvu za obrazovanje, nauku, kulturu i sport Zeničko-dobojskog kantona te firmama Moj san, Trgošped, Delibašić i Tiron.

Sadržaj biltena

Riječ domaćina takmičenja 4
Zadaci i rješenja 9
A: MEHANIKA I TERMODINAMIKA 9
B: ELEKTROMAGNETIZAM I OSCILACIJE 17
C: OPTIKA I ATOMSKA FIZIKA 27
D: CJELOKUPNA FIZIKA 33
Konačne rang liste 48
KONAČNI REZULTATI GRUPE A 48
KONAČNI REZULTATI GRUPE B 50
KONAČNI REZULTATI GRUPE C 51
KONAČNI REZULTATI GRUPE D 52

Riječ domaćina takmičenja

Mašinski fakultet Univerziteta u Zenici je osnovan 1977. godine. Ove, 2019. godine, institucija je obilježila 42 godine uspješnog rada i razvoja, prvenstveno u oblasti visokog obrazovanja kadrova mašinskih inženjera u više različitih odsjeka.

Dobra saradnja nauke i privrede predstavlja osnovu napretka svakog društva. Na konkretne i aktuelne zahtjeve privrede nauka odgovara rješavanjem postojećih problema i njihovim unapređenjem, kao i ponudom sasvim novih. Otvorenost privrede i uska saradnja sa naučno-istraživačkim kadrovima kroz rješavanje konkretnih privrednih problema jeste jedini put za istraživače ka pronalaženju najoptimalnijih rješenja za konkretne privredne aplikacije. Mašinski fakultet Univerziteta u Zenici upravo je nastao iz te potrebe da se odgovori zahtjevima privrede i društva i da se stvori uzajamna sprega između nauke i privrede na obostranu korist.

Osnovni pravci djelovanja Fakulteta su u domenima: visokoobrazovnog edukativnog procesa, naučno-istraživačkog rada, te stručnog rada u saradnji sa privredom.

Osnovna misija naše visokoškolske institucije jeste kreiranje mladih naraštaja inženjera i inženjerki, kao punopravnih članova akademske zajednice na temeljima kvalitetnog obrazovanja, sticanja vještina i kompetencija, razvijanja poduzetništva, timskog rada i kreativnosti, znanja stranih jezika i IT tehnologija, profesionalnog odgoja, etičnosti i humanizma, koji se po završetku studija mogu odmah i ravnopravno uključiti u privredni i društveni život, kako u našoj državi Bosni i Hercegovini, tako i na globalnom nivou. Napredak savremenog društva se temelji na znanju, a kvalitetno obrazovani mladi ljudi su najvažniji resurs.

Mašinski fakultet djeluje u sklopu Univerziteta u Zenici koji je prvi akreditirani i reakreditirani javni univerzitet u Federaciji BiH i kao takav je prepoznat kao mjesto koje nudi kvalitetno visoko obrazovanje, dobru priliku za naučnoistraživački rad, te garantovano prepoznavanje diploma, znanja i vještina u javnom sektoru i privatnim kompanijama.

Na Mašinskom fakultetu u stalnom radnom odnosu su angažirani: 25 doktora tehničkih nauka (redovni profesori, vanredni profesori i docenti), 1 magistar tehničkih nauka (viši asistent), 2 diplomirana inženjera maš. (asistenti), 20 uposlenika ostalih službi (studentska služba, administrativno-pravna služba, tehnička služba i drugi). Pored stalno zaposlenih profesora i asistenata u nastavni proces uključeno je preko 40 istaknutih stručnjaka iz Bosne i Hercegovine i inostranstva u svojstvu profesora i asistenata.

Do danas je na Mašinskom fakultetu u Zenici studije I, II i III ciklusom studija bilo i jeste obuhvaćeno oko 7800 studenata, a studije je finaliziralo oko: 1330 diplomiranih inženjera mašinstva i inženjera mašinstva, 120 magistara tehničkih nauka i 40 doktora tehničkih nauka. Ovakav pristup govori o istrajavanju u postizanju izvrsnosti i kvaliteta visokoobrazovanih mladih kadrova sa akcentom na izlazne kompetencije i znanje.

Mašinski fakultet Univerziteta u Zenici raspolaže sa oko 4500 m^2 korisnog prostora, od kojih oko 2000 m^2 predstavlja kapacitet učionica, a ostali kapaciteti obuhvataju 10 laboratorija s najsavremenijom opremom i 120 računara, kancelarijski prostor, biblioteku sa oko 10.000 knjižnih jedinica, čitaonicu, fiskulturnu salu, studentsku kantinu, itd.)

Matične katedre na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Zenici su: Katedra za mehanike, Katedra za konstrukcije i CAD tehnologije, Katedra za proizvodne tehnologije, Katedra za održavanje, Katedra za energetiku i procesno inženjerstvo, Katedra za automatizaciju i metrologiju, Katedra za industrijski inženjering i CIM tehnologije, Katedra za ekološko inženjerstvo, Katedra za dizajn i tehnologije u drvopreradi.

Najsavremeniju opremu iz domena edukativnog i naučno-stručnog rada posjeduje 10 laboratorija: Laboratorija za tehničku dijagnostiku, Laboratorija za mjernu tehniku, Laboratorija za elektrotehniku, Laboratorija za primijenjenu mehaniku, Laboratorija za mehaniku fluida i hidrauliku, Laboratorija za industrijsko inženjerstvo, Laboratorija za obradu rezanjem i alatne mašine, Laboratorija za inženjerski dizajn LECAD II, Laboratorija za dizajn i tehnologiju u drvopreradi, Laboratorija za okolinski monitoring.

Također, svoje djelovanje obavlja 6 centara. Poseban značaj ima iDEALab centar koji je potpuno namijenjen studentima, te razvoju i implementaciji studentske inovativnosti i preduzetništva, putem korištenja prostorije evropskog koncepta, opreme za 3D printanje, 3D skeniranje, programiranje robotskih sistema, softvera SolidWorks za 3D modeliranje, itd. U sklopu ovog centra studenti su, u saradnji sa mentorima, uradili do sada oko 50 projekta, od kojih se posebno izdvajaju: izrada prvog 3D printera u BiH, izrada originalnog rješenja Pi-projektor (sa kojim su studenti osvojili prvo mjesto na IEEE takmičenju 12 fakulteta), realizacija prvog hirurškog zahvata u BiH u saradnji mladog doktora Kantonalne bolnice Zenica i mladih kolega izradom 3D modela i ugradnje implantata oštećenog dijela lobanje nakon 3D otprintanog uzorka, prva izrada u BiH dvije proteze za podlaktične segmente desne ruke za dvije djevojčice, itd.

Studijski programi na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Zenici

Od akademske 2005/06. godine u primjeni je Bolonjski proces o vrednovanju rada studenata na osnovu Evropskog sistema prenosa bodova – ECTS sistem (European Credit Transfer Sistem). Po ovom sistemu izrađeni su i u primjeni Nastavni planovi i programi na svim Odsjecima dodiplomskog studija po konceptu 4+1+3 i po konceptu 3+2+3.

Dodiplomski studij je trenutno koncipiran u 5 studijskih odsjeka: Inženjerski dizajn proizvoda (IDP), Menadžment proizvodnim tehnologijama (MPT), Inženjerska ekologija (IE) i održavanje (ODR) na četvorogodišnjem studiju, te odsjeku Mašinstvo na trogodišnjem studiju. ***Od 2019./20. akademske godine biće aktivna još dva nova studijska odsjeka: 'Inženjerska i poslovna informatika' - na četvorogodišnjem, te odsjek 'Dizajn i tehnologije u drvopreradi' - na trogodišnjem studiju.***

U okviru studijskih programa, na temeljima matematike, fizike i drugih baznih znanja, izučavaju se savremena područja inženjerstva kao npr.: mehanika, mehatronika, robotika, strukturna analiza, termodinamika, 3D modeliranje, kompozitni materijali, CFD analize protoka fluida, analize komponenti i sklopova metodom konačnih elemenata i volumena, biomehanika, ispitivanja i reciklaže raznovrsnih tehničkih materijala; projektovanje toplinskih, energetskih i proizvodnih procesa; obnovljivih izvora energije i okolinskih aspekata; automatizacije, vođenja procesa, osiguranja kvalitete, mjerenja, te rukovođenja i unapređenja proizvodnje i organizacije rada i proizvodnje. Koriste se savremeni pristupi i alati CAD (Computer Aided Design), CAM (Computer Aided Manufacturing), CAE (Computer Aided Engineering), PDM/PLM, metodologije za dizajniranje i analizu proizvoda, tehnologija proizvodnje, razvoja proizvoda, praćenja životnog ciklusa proizvoda, itd.

Magistarske studije nude nastavak studiranja po konceptu 4+**1**+3 na navedenim odsjecima četvorogodišnjeg studija, uz dodatak odsjeka "Metrologija", a nakon završetka trogodišnjeg studija master studij se može studirati po konceptu 3+**2**+3 na odsjeku "Metrologija" i "Obnovljivi izvori energije i okolinski aspekti". U pripremi je i odsjek 'Mehatronika'.

Zajednički doktorski studij tri tehnička fakulteta Univerziteta u Zenici je u fazi finalizacije.

CIKLUS studija	KONCEPT studija	ODSJEK	IZLAZNO ZVANJE
PRVI	4+1+3	*INŽENJERSKI DIZAJN PROIZVODA*	DIPLOMIRANI INŽENJER MAŠINSTVA (240 ECTS)
		MENADŽMENT PROIZVODNIM TEHNOLOGIJAMA	
		INŽENJERSKA EKOLOGIJA	
		ODRŽAVANJE	
		INŽENJERSKA I POSLOVNA INFORMATIKA	
	3+2+3	*MAŠINSTVO*	INŽENJER MAŠINSTVA (180 ECTS)
		DIZAJN I TEHNOLOGIJE U DRVOPRERADI	INŽENJER DRVOPRERADE (180 ECTS)
DRUGI	4+1+3	*INŽENJERSKI DIZAJN PROIZVODA*	MAGISTAR MAŠINSTVA (60 ECTS)
		MENADŽMENT PROIZVODNIM TEHNOLOGIJAMA	
		INŽENJERSKA EKOLOGIJA	
		ODRŽAVANJE	
		METROLOGIJA	
	3+2+3	*OBNOVLJIVI IZVORI ENERGIJE*	MAGISTAR MAŠINSTVA (120 ECTS)
		METROLOGIJA	
		MEHATRONIKA - U PROCESU REALIZACIJE	
TREĆI	4+1+3 3+2+3	*DOKTORSKI STUDIJ – U PROCESU FINALIZACIJE*	DOKTOR TEHNIČKIH NAUKA (180 ECTS)

**** detaljniji opis studijskih programa na www.mf.unze.ba***

Nastavni planovi i programi usklađeni su s ECT(A)S-om, s mogućnošću vertikalne i horizontalne prohodnosti. U okviru studija, studenti izučavaju Engleski jezik i ovladavaju računarskim tehnikama i tehnologijama, a studentska praksa jeste obavezni dio.

Načini i uvjeti studiranja

Na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Zenici na I i II ciklusu studija - dodiplomski i magistarski studij studenti mogu studirati kao redovni studenti koje finansira Osnivač i kao redovni samofinansirajući studenti.

Za akademsku 2019./20.godinu, na Mašinskom fakultetu u Zenici za prvu godinu I ciklusa 4+1+3 koncepta planirana je upisna kvota 180 studenata, a za prvu godinu I ciklusa 3+2+3 koncepta - odsjek Mašinstvo 45 studenata. Za I godinu Master ciklusa planirana upisna kvota je 50 studenata.

Nakon završetka studija svih stepena završenici imaju mogućnost raditi u: svim oblastima industrije, energetike, rudarstva, saobraćaja itd, obrazovanju kao profesori, trgovačkim institucijama, inspekcijskim službama i sl. Danas je teško navesti oblast gdje naši završenici nisu zaposleni, kako u Bosni i Hercegovini, tako i u svijetu. Širok je spektar poslovnih zadataka koje naši završenici mogu obavljati, kao što su poslovi npr. u razvojno-konstrukcijskom odjeljenju (inženjerski dizajn/konstruiranje, tehnologija), poslovi pripreme proizvodnje, CNC simulacija i same proizvodnje, poslovi marketinga i prodaje, IT tehnologija, menadžerstva, savremenog razvoja proizvoda, savremenog dizajna, optimizacije proizvoda i proizvodnih procesa, programiranja sistema i robota, kreiranja low-cost sistema, automatizacije procesa proizvodnje, itd.

Mobilnost studenata

U saradnji sa Uredom za međunarodnu saradnju Univerziteta u Zenici posebna pažnja posvećena je **međunarodnoj mobilnosti** studenata i nastavnika kroz učešće u CEEPUS, ERASMUS + mrežama, itd., a rezultati su stručne posjete studenata, pohađanje semestara i izrade diplomskih radova na univerzitetima: Belgije, Njemačke, Španije, Austrije, Slovenije, Hrvatske, Bugarske, Češke, ...

Kroz razmjenu imamo i gostovanja profesora sa drugih univerziteta, kao npr. Daniel McGehee (ISU), Peter de Coster (Odisee), Hutanu Constantin (Alba Iulia), itd., kao i studenata Cristof van Heghe, Cyril de Brandt, itd. U okviru mobilnosti naših studenata trenutno u ovom semestru je aktivno osam studenata: tri u Njemačkoj i pet u Španiji, na eminentnim univerzitetima

Saradnja sa evropskim univerzitetima

Postoji značajan broj ugovora o saradnji sa stranim univerzitetima, a trenutno je aktuelan s Univerzitetom 'Ostwestfalen-Lippe' u Lemgu u Njemačkoj, na osnovu kojeg je izvršena i zajednička aplikacija u sklopu DAAD i Erasmus+ programa u cilju razmjene studenata i nastavnika svakog semestra. Također, ove godine, aktivne su tri mreže u okviru CEEPUS projekta uz saradnju više evropskih i regionalnih univerziteta.

Bogata saradnja sa privredom

Iz domena saradnje sa privrednim subjektima Mašinski fakultet ima dugogodišnju saradnju sa cijenjenim kompanijama u region i šire: ArcelorMittal Zenica, Heidelbergcement Kakanj, MANN+HUMMEL, GS-TMT, BME, TERMOMATIK, Natron-Hayat, Pobjeda, ADK, BNT, AMBYENTA, ... Posebno smo ponosni na činjenicu da u ovim i mnogim drugim kompanijama jesu prisutni naši inženjeri, pa i na pozicijama rukovođenja i razvoja. Kroz aktivnosti stručne saradnje sa kompanijama ostvaruju se projekti od privrednog i naučno-istraživačkog interesa.

Također, prema našoj ALUMNI statistici, preko 230 završenika radi širom svijeta (Australija, Kanada, SAD, Njemačka, Austrija, Saudijska Arabija, Italija i dr.) i u svim zemljama je priznata diploma Mašinskog fakulteta Univerziteta u Zenici. Također, kompatibilnost naših studijskih programa za nastavak studiranja na višim nivoima u Evropskim i drugim zemljama je neupitna. Fakultet ostvaruje dobru saradnju gotovo sa svim kompanijama tehničkog usmjerenja, kao i sa drugim relevantnim kompanijama, kako u Bosni i Hercegovini tako i u regionu, kroz izrade projekata, stručne prakse studenata, kao i edukativno-stručne

ekskurzije. Kao činjenicu navodimo da su samo u prošlom zimskom semestru 2018./19. akademske godine studenti posjetili 15 kompanija tokom edukativno-stručnih posjeta.

Edukativno-stručne ekskurzije studenata širom Evrope

Pored saradnje sa kompanijama u BiH i regionu studenti Mašinskog fakulteta UNZE svake godine odlaze i na međunarodne edukativno-stručne ekskurzije. Do sada su studenti posjetili nekoliko renomiranih kompanija poput: SEAT – Spain, EvoBus GmbH Setra Omnibusse u Njemačkoj, BMW – Munchen u Njemačkoj, Biesse Group u Italiji, institucije i kompanije u Mariboru, Austriji i Njemačkoj, a studenti se upravo spremaju za planiranu posjetu MKR Systeme GmbH i KUKA – Augsburg u Njemačkoj.

I na kraju …

Pred maturantima se nalazi veoma bitna faza života, a to je pravilan odabir studija, koji će utjecati na njihovu i našu budućnost. Stoga, odabrati kvalitetan studij, prema kojem postoji afinitet će umnogome olakšati sticanje kvalitetnog znanja, respektabilne diplome, te zaposlenja u renomiranim kompanijama u Bosni i Hercegovini ili inostranstvu.

Na tom putu Mašinski fakultet Univerziteta u Zenici našim srednjoškolcima maturantima široko otvara svoja vrata, nudi sticanje vrhunskog znanja u saradnji sa privredom i evropskim univerzitetima, dodatne vještine i diplomu prepoznatljivu u čitavom svijetu.

POSEBNO IZRAŽAVAMO SVOJE VELIKO ZADOVOLJSTVO da smo imali priliku biti domaćini XXIV federalnog takmičenja iz fizike za srednje škole, u saradnji sa Društvom fizičara Federacije BiH, te biti mjesto okupljanja i daljeg promicanja mladosti, ljepote i znanja, sa kojom se može ponositi naša država Bosna i Hercegovina.

Zadaci i rješenja

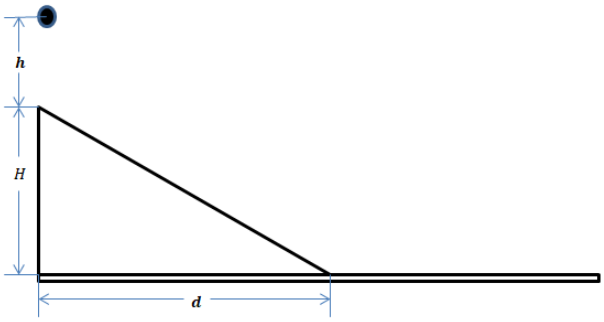
A: MEHANIKA I TERMODINAMIKA

Zadatak 1: Loptica puštena da slobodno pada (sa visine h u odnosu na vrh strme ravni, vidjeti sliku) elastično se odbija od strmu ravan pri samom vrhu. Definišimo domet loptice D kao put koji bi trebali prehodati od vrha strme ravni do mjesta gdje je loptica udarila prvi put nakon odbijanja od strmu ravan. Odrediti sa koje visine h bi loptica trebala biti puštena da domet bude

a) $D_1 = 4.8$ m

b) $D_2 = 6.9$ m

Uzeti da je $H = 3$ m i $d = 4$ m.



Rješenje:

a) Brzina kojom loptica udara u strmu ravan je $v_0 = \sqrt{2gh}$ (1 bod). Pošto je sudar elastičan, brzina loptice nakon udara se neće promijeniti. Također, ugao između normale na strmu ravan i pravca kretanja loptice prije i poslije udara se neće promijeniti (vidjeti sliku).

Iz trigonometrije znamo da je

$tan\,\theta = \frac{H}{d} = \frac{3}{4}, sin\,\theta = \frac{H}{s} = \frac{3}{5}, cos\,\theta = \frac{d}{s} = \frac{4}{5}$, (1 bod)

a s se računa preko Pitagorine teoreme

$s = \sqrt{H^2 + d^2} = 5$ m (1 bod)

Postavimo koordinatni sistem tako da y' osa bude okomita na strmu ravan i x' osa paralelna strmoj ravni i usmjerena ka dole.

U ovom koordinatnom sistemu, komponente gravitacionog ubrzanja su $g'_x = g\,sin\,\theta$ (1 bod) i $g'_x = g\,cos\,\theta$ (1 bod), te se položaj i komponente brzine mijenjaju kao

$x' = v_0\,sin\,\theta\,t + \frac{g\,sin\,\theta t^2}{2} = \left(v_0 t + \frac{gt^2}{2}\right) sin\,\theta$ (1 bod)

$y' = v_0\,cos\,\theta - \frac{g\,cos\,\theta t^2}{2} = \left(v_0 t - \frac{gt^2}{2}\right) cos\,\theta$ (1 bod)

$v'_x = v_o\,sin\,\theta + g\,sin\,\theta\,t = (v_o + gt)\,sin\,\theta$ (1 bod)

$v'_y = v_o\,cos\,\theta - g\,cos\,\theta\,t = (v_o - gt)\,cos\,\theta$ (1 bod)

Jednostavnim računom, ako stavimo da je $v'_y = 0$ i iz te jednačine izvučemo t, te ga pomnožimo sa 2 (loptici treba isto vremena da joj brzina po y' osi sa

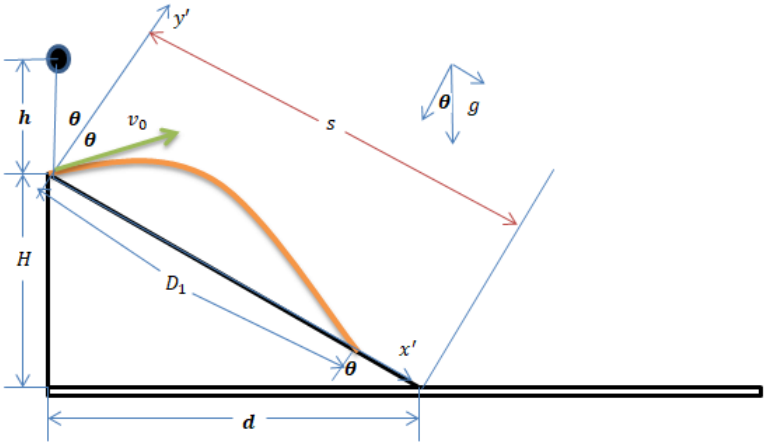
početne spadne na nulu kao i da sa nule ponovo se vrati na početnu brzinu, tj. komponentu brzine po toj osi, i u tom trenutku loptica udara u podlogu)

$t_1 = \frac{2v_0}{g}$. (1 bod)

Uvrštavanjem vremena t_1 u jednačinu za položaj x' dobivamo da je (nakon sređivanja)

$x' = D_1 = 8h_1 \sin\theta$ (1 bod)

$h_1 = \frac{D_1}{8\sin\theta} = 1$ m (1 bod)



b) U prethodnom dijelu smo razmatrali kretanje samo iznad strme ravni zbog toga što je domet loptice bio manji od dužine strme ravni s. U ovom slučaju, domet loptice je veći od dužine strme ravni pa ćemo problem razmatrati na drugačiji način.

Sada ćemo koordinatni sistem postaviti kao na slici 2, y osa je vertikalna, dok je x osa horizontalna.

D_x se dobije kao

$D_x = d + (D_2 - s)$. (2 boda)

Jednačine za položaj u ovom slučaju su

$x = v_0 \sin(2\theta)\, t$ (1 bod)

$y = H + v_0 \cos(2\theta)\, t - \frac{gt^2}{2}$. (1 bod)

Ako stavimo da je $y = 0$ dobivamo kvadratnu jednačinu za vrijeme, te nakon rješavanja dobivamo

$t_{1/2} = \frac{2v_0\cos(2\theta) \pm \sqrt{4v_0^2\cos^2(2\theta) + 8gH}}{2g}$ (3 boda)

Te uzimamo rješenje sa $+$ zbog toga što nam vrijeme treba biti pozitivno.

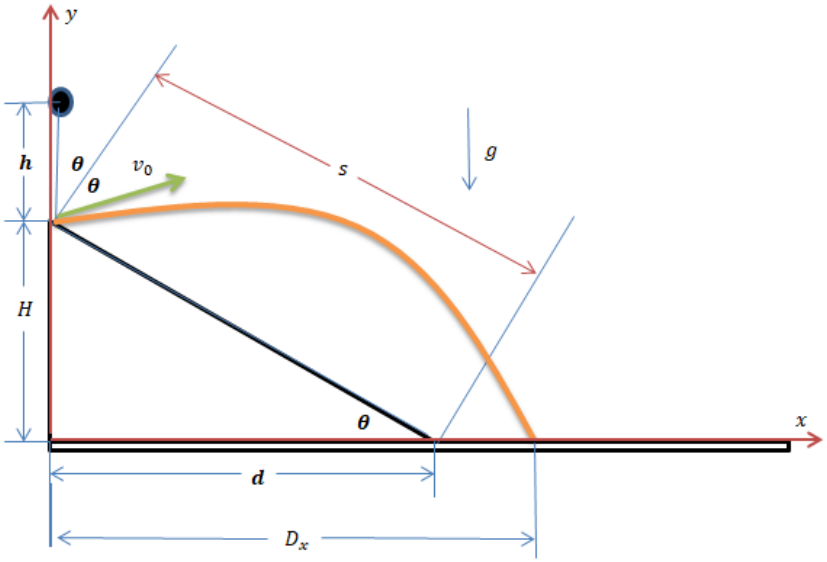
Sada uvrstimo dobiveno vrijeme leta u jednačinu za x i time dobivamo vrijednost D_x

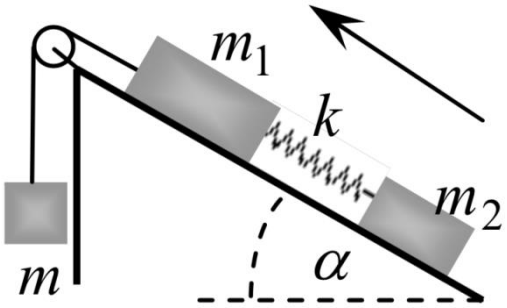
$$x = D_x = d + D_2 - s = v_0\, sin(2\theta)\frac{\left(2v_0\, cos(2\theta) + \sqrt{4v_0^2 cos^2(2\theta) + 8gH}\right)}{2g}.$$ (2 boda)

Uvrštavanjem izraza za brzinu $v_0 = \sqrt{2gh}$, dobivamo jednačinu koja se može svesti na kvadratnu jednačinu u kojoj se kao nepoznata pojavljuje samo h i čije je rješenje dato u obliku

$$h = \frac{625(D_2 - 1)^2}{96(7D_2 + 65)} = 2 \text{ m}, \qquad (4 \text{ bod})$$

gdje smo uzeli da sve veličine koje uvrstimo budu u SI sistemu.





Zadatak 2: Na strmoj ravni, nagibnog ugla $\alpha = 30°$, nalaze se tijela masa $m_1 = 0.2$kgi $m_2 = 0.5$kgmeđusobno povezana idealnom elastičnom oprugom čiji je koeficijent krutosti $k = 100$N/m(slika). Tijela masa $m = 2\ kg$ i m_1 su međusobno povezana neistegljivim koncem zanemarive mase. Koeficijent trenja između strme ravni i tijela je $\mu = 0.1$. Ako je smijer kretanja sistema kao što pokazuje strelica na slici, odrediti ubrzanje i istegnutost opruge.

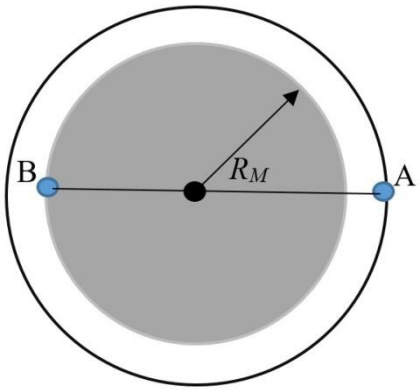
Rješenje:

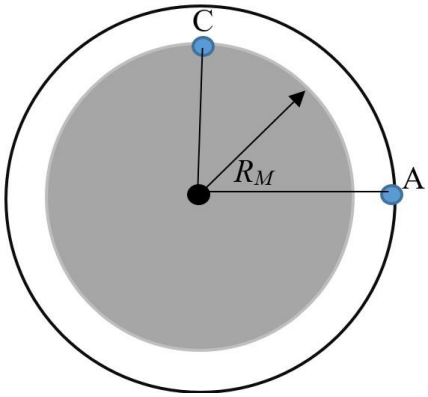
Konac je neistegljiv odakle slijedi da se cijeli sistem kreće nekim ubrzanjem čiji je intenzitet a. Pošto je masa konca zanemariva, za sile zatezanja vrijedi $T = T_1$. Također vrijedi $\vec{F}_{e1} = -\vec{F}_{e2}$

(2 boda)

Tijelo mase m: $ma = mg - T$ (2 boda)
Tijelo mase m_1: $m_1 a = -m_1 g sin\alpha + T_1 - F_{e1} - \mu N_1; N_1 = m_1 g cos\alpha$ (2+2 boda)
Tijelo mase m_2: $m_2 a = -m_2 g sin\alpha + F_{e2} - \mu N_2; N_2 = m_2 g cos\alpha$(2+2 boda)
Sabiranjem gornjih relacija dobivamo:
$(m + m_1 + m_2)a = mg - m_1 g sin\alpha - \mu m_1 g cos\alpha - m_2 g sin\alpha - \mu m_2 g cos\alpha$
Odavde slijedi da je ubrzanje
$a = \frac{m-(m_1+m_2)(sin\alpha+\mu cos\alpha)}{m+m_1+m_2} g = 5.77 m/s^2$ (4 boda)
Na osnovu relacije za tijelo mase m_2 možemo pisati
$F_{e2} = m_2 a + m_2 g sin\alpha + \mu m_2 g cos\alpha$, (3 boda)
A pošto je $F_{e2} = k\Delta l$, za izduženje dobivamo (3 boda)
$\Delta l = \frac{m_2(a+gsin\alpha+\mu g cos\alpha)}{k} = 0.058m$. (3 boda)

Zadatak 3: Od 1969. pa do 1972. godine na Mjesec je uspješno sletjelo ukupno 6 misija na kojim su bili uključeni ljudi. Prva i najpoznatija misija Apollo 11, je sletjela na Mjesec 20. jula 1969. godine, a zadnja Apollo 17, 11. decembra 1972. godine. U ovom zadatku ćemo razmotriti neke osnovne manevre pri kretanju u svemiru.
Da bi raketa napustila polje Zemljine teže, mora se generirati ogromna potisna sila za sticanje tzv. Druge kosmičke brzine koja se definiše kao minimalna brzina potrebna da neko tijelo napusti polje Zemljine teže.
a) Izvedite izraz za Drugu kosmičku brzinu!
Mjesec se razlikuje u mnogim stvarima od Zemlje, a jedna od njih je gravitaciono ubrzanje koje igra veliku ulogu pri kretanju po površini Mjeseca.
b) Odredite gravitaciono ubrzanje na površini Mjeseca!
Razmotrimo sada raketu mase $M = 14 \cdot 10^3$ kg koja se kreće oko Mjeseca po kružnoj putanji na visini $h = 150$ km. U tački A (slika) se motor rakete nakratko aktivira ispuštajući ispušne gasove brzine $u = 10^4$ m/s u odnosu na raketu u smjeru kretanja rakete, tako da raketa uspori.
c) Kolika masa goriva se mora potrošiti pri aktiviranju motora u tački A, ako želimo prizemljiti raketu u tački B?
d) Nacrtajte i objasnite putanju rakete od tačke A do tačke B!
e) U drugom slučaju raketi se daje impuls koji je usmjeren prema centru Mjeseca da bi sletjela u tački C. Odredite masu potrošenog goriva u ovom slučaju!
Zanemarite bilo kakve gubitke i pretpostavite da je količina goriva koja se sagori puno manja od mase rakete.





Vrijednosti konstanti:
Masa Mjeseca: $M_M = 7.35 \cdot 10^{22}$kg
Radijus Mjeseca: $R_M = 1.7 \cdot 10^3$ km
Gravitaciona konstanta: $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2

Rješenje:

a) Pri određivanju Druge kosmičke brzine koristit ćemo Zakon očuvanja energije pod pretpostavkom da kada tijelo napusti polje Zemljine teže na njega ne djeluje nikakva druga sila. Iz ZOE imamo:

$-G\frac{mM_z}{R_z} + \frac{mv^2}{2} = 0$ (2 boda)

(na površini Zemlje imamo gravitacionu potencijalnu energiju tijela i njegovu kinetičku energiju, a pri izlasku iz Zemljinog polja smatramo da nema međudjelovanja sa drugim tijela). Imamo da je Druga kosmička brzina jednaka:$v = \sqrt{\frac{2GM_z}{R_z}}$ (1 bod)

b) Imamo da je na površini Mjeseca u stanju ravnoteže:

$$m\vec{g}_M = -G\frac{mM_M}{R_M^2}\vec{r}_0$$

$$\vec{g}_M = -G\frac{M_M}{R_M^2}\vec{r}_0 \text{ (1 bod)}$$

gdje negativan znak pokazuje smjer ubrzanja. Nakon uvrštavanja dobivamo $\vec{g}_M = (-1.696)\vec{r}_0$ m/s^2.

c) Prilikom kretanja rakete po kružnoj putanji oko Mjeseca imamo da je veza između centripetalnog ubrzanja i gravitacione sile:

$$G\frac{MM_M}{(R_M+h)^2} = \frac{Mv_0^2}{R_M+h}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_M}{R_M+h}} \text{ (1 bod)}$$

Ako označimo sa v_A i v_B brzine u tačkama A i B respektivno onda na osnovu ZOE možemo napisati jednačinu:

$$-G\frac{MM_M}{R_M+h} + \frac{Mv_A^2}{2} = -G\frac{MM_M}{R_M} + \frac{Mv_B^2}{2} \text{ (2 boda)}$$

Ovdje je bitno napraviti razliku između brzina v_0 i v_A, a ona se ogleda u tome da je motor morao usporiti raketu sa brzine v_0 na brzinu v_A kako bi ona sletjela u tački B.

Također na osnovu Zakona održanja ugaonog momenta možemo pisati sljedeću jednačinu znajući da su vektori brzina u tačkama A i B okomiti na vektore radijus vektora položaja rakete:

$$Mv_A(R_M+h) = Mv_BR_M \text{ (2 boda)}$$

Kombinirajući jednačine dobivamo da je brzina u tački A nakon sređivanja:

$$v_A = \sqrt{\frac{2GM_MR_M}{(R_M+h)(2R_M+h)}}$$

ili napisano preko brzine v_0:

$$v_A = v_0\sqrt{\frac{2R_M}{(2R_M+h)}}$$

Sada imamo da je promjena brzine rakete nakon korištenja motora jednaka:

$\Delta v_1 = v_0 - v_A = v_0\left(1 - \sqrt{\frac{2R_M}{(2R_M+h)}}\right) = 35.2m/s$ (1 bod)

Iz Zakona očuvanja momenta imamo da je promjena impulsa rakete jednaka promjeni impulsa goriva:

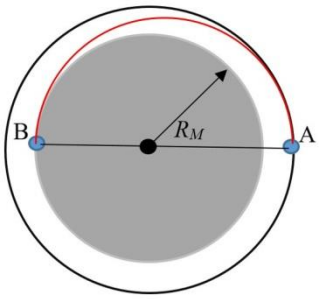
$(M - \Delta m_g)\Delta v_1 = \Delta m_g u$ (2 boda)

Odavde slijedi da je masa goriva koja se sagori jednaka:

$\Delta m_g = \frac{\Delta v_1}{\Delta v_1 + u} M = 49.2kg$ (1 bod)

d) Putanja rakete će biti elipsa prikazana kao na slici.

(2 boda)



e) Pošto motor daje brzinu raketi prema centru Mjeseca, a brzina kruženja rakete je tangencijalna na kružnicu po kojoj se kreće onda će nova brzina rakete nakon slaganja ova dva vektora biti:

$\vec{v_A} = \vec{v_0} + \vec{\Delta v_2}$ (2 boda)

a njen intenzitet je dat kao:

$\left|\vec{v_A}\right| = v_A = \sqrt{v_0^2 + (\Delta v_2)^2}$ (1 bod)

Kao i u prethodnom dijelu imamo iz ZOE:

$-G\frac{MM_M}{R_M+h} + \frac{Mv_A^2}{2} = -G\frac{MM_M}{R_M} + \frac{Mv_C^2}{2}$ (2 boda)

i iz Zakona očuvanja ugaonog momenta imamo pod uslovom da je:

$\left|\vec{L}\right| = M\left|\vec{r} \times \vec{v_A}\right| = M\left|\vec{r} \times (\vec{v_0} + \vec{\Delta v_2})\right| = M\left|(\vec{r} \times \vec{v_0} + \vec{r} \times \vec{\Delta v_2})\right| = Mv_0(R_M + h)$

gdje je: $\left|\vec{r}\right| = R_M + h$, a $\vec{v_0} \| \vec{r}$ i $\vec{\Delta v_2} \perp \vec{r}$. Sad imamo da je:

$Mv_0(R_M + h) = Mv_C R_M$ (2+1 boda)

Nakon kraćeg sređivanja imamo da je brzina koju je motor saopštio raketi jednaka:

$\Delta v_2 = v_0\frac{h}{R_M} = 145.6m/s$ (1 bod)

I opet ćemo imati iz Zakona očuvanja momenta da je masa potrošenog goriva jednaka:

$\Delta m_g = \frac{\Delta v_2}{\Delta v_2 + u} M = 200.9kg$ (1 bod)

Zadatak 4: Planirajući da napravi tzv. Slobodni balon, budući aeronautičar je pripremio dva modela. Jedan sa vrućim zrakom, a drugi sa helijumom. Masa balona sa ostalom opremom koju model treba da podigne je 25 kg.Za model sa vrućim zrakom je uzeo u obzir sljedeće činjenice: temperatura atmosfere je 25°C, a pritisak 1 atm. Prosječna molekularna masa zraka je 29 g/mol, dok je za vrući zrak temperature 100°C molarna masa 32 g/mol.U slučaju mode-la sa helijumom, upoznat je sa činjenicom da je gustoća helijuma $18 \cdot 10^{-5}$ kg/l, dok je gustoća zraka $120 \cdot 10^{-5}$kg/l.
Odrediti za koji od modela mu je potrebna manja zapremina, za model sa vrućim zrakom, ili model sa helijumom?
Rješenje:

$m = 25kg; t_A = 25^{\circ}C = 298.15K; p = 1atm = 98066.5Pa$
$M_A = 29\frac{g}{mol}$
$t_Z = 100^{\circ}C = 373.15K$
$M_Z = 32\frac{g}{mol}$
$\rho_{He} = 18 \cdot 10^5 \frac{kg}{l} = 0.18\frac{kg}{m^3}$
$\rho_A = 120 \cdot 10^5 \frac{kg}{l} = 1.2\frac{kg}{m^3}$
$\frac{V_Z}{V_{He}} =?$

Za model sa vrućim zrakom vrijedi:
$pV = nRT; n = \frac{m}{M}$ (2+2 boda)
$m_A - m_Z = m = 25kg$ (2 boda)
$m_A = \frac{pVM_A}{RT_A}$ (1 bod)
$m_Z = \frac{pVM_Z}{RT_Z}$(1 bod)
$V = V_A = V_Z$ (1 bod)
$m = \frac{pV}{R}\left(\frac{M_A}{T_A} - \frac{M_Z}{T_Z}\right)$(2 bod)
$V_Z = \frac{Rm}{p\left(\frac{M_A}{T_A} - \frac{M_Z}{T_Z}\right)} = 234.61m^3$(3 bod)
Za model sa helijumom vrijedi:
$G_A = m_A g G_{He} = m_{He} g G = mg$ (1+1+1 bod)
$G_A - G_{He} - G = 0$
$m_A g - m_{He} g - mg = 0$(2 bod)
$m = \rho V$(1 bod)
$\rho_a V - \rho_{He} V - m = 0$(1 bod)
$V_{He} = \frac{m}{\rho_A - \rho_{He}} = 275m^3$(2 bod)
$\frac{V_Z}{V_{He}} = 0.85 = 85\%$(2 bod)

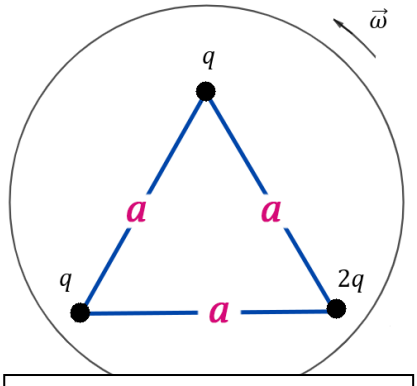
B: ELEKTROMAGNETIZAM I OSCILACIJE

1. Zadatak (25 bodova)

U tjemena jednakostraničnog trougla stranice a, postavljenog na platformu koja može rotirati, fiksirana su dva naelektrisanja $+q$ i jedno naelektrisanje $+2q$, kao što je to prikazano na slici. Čitav sistem se nalazi u vakuumu.

a) Odredite rezultujuću elektrostatičku silu koja djeluje na naboj $+2q$. **(15 bodova)**

b) Odredite magnetnu indukciju u centru trougla ako platforma rotira ugaonom brzinom ω, pretpostavljajući da je ugaona brzina takva da se kretanje naelektrisanja može aproksimirati kretanjem struje kroz provodnik. **(10 bodova)**



Slika 1: Slika uz 1. zadatak

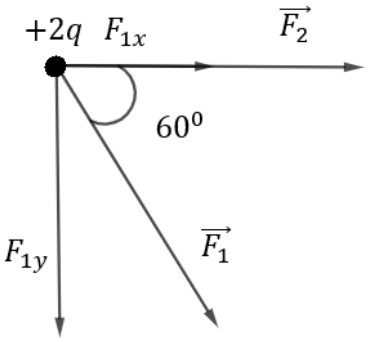
Napomena: sve rezultate izraziti preko veličina a, q, ω, konstante k i magnetne permitivnosti vakuuma μ_0.

Rješenje zadatka:

a) (15 bodova)

Na naboj $+2q$ djeluju odbojne Coulombove sile F_1 i F_2 kao što je prikazano na slici. Intenziteti tih sila su dati sa:

$$F_1 = k\frac{q2q}{a^2} = 2k\frac{q^2}{a^2}$$
$$F_2 = k\frac{q2q}{a^2} = 2k\frac{q^2}{a^2}$$



(3 boda)

Rezultujuća sila će biti jednaka vektorskom zbiru sila F_1 i F_2. Da bi izračunali rezultujuću silu, silu F_1 razlažemo na komponentu F_{1x} koja je paralelna sili F_2, i na komponentu F_{1y} koja je okomita na silu F_2. Stoga imamo:

$$F_{1x} = 2k\frac{q^2}{a^2}\cdot\cos 60^0 = 2k\frac{q^2}{a^2}\cdot\frac{1}{2} = k\frac{q^2}{a^2}$$
$$F_{1y} = 2k\frac{q^2}{a^2}\cdot\sin 60^0 = 2k\frac{q^2}{a^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = k\sqrt{3}\frac{q^2}{a^2}$$

(3 boda)

X komponenta rezultujuće sile je data sa:

$$F_x = F_2 + F_{1x} = 2k\frac{q^2}{a^2} + k\frac{q^2}{a^2} = 3k\frac{q^2}{a^2}$$

(2 boda)

Y komponenta rezultujuće sile je data sa:

$$F_y = F_{1y} = k\sqrt{3}\frac{q^2}{a^2}$$

(2 boda)

Kako su komponenterezultujuće sile F_x i F_y međusobno okomite, ukupna sila može se naći pomoću Pitagorine teoreme:

$$F = \sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2} = \sqrt{9k^2\frac{q^4}{a^4} + 3k^2\frac{q^4}{a^4}} = k\frac{q^2}{a^2}\sqrt{12} = 2\sqrt{3}k\frac{q^2}{a^2}$$

(3 boda)

Pravac djelovanja sile može se naći primjenom definicije tangensa ugla:

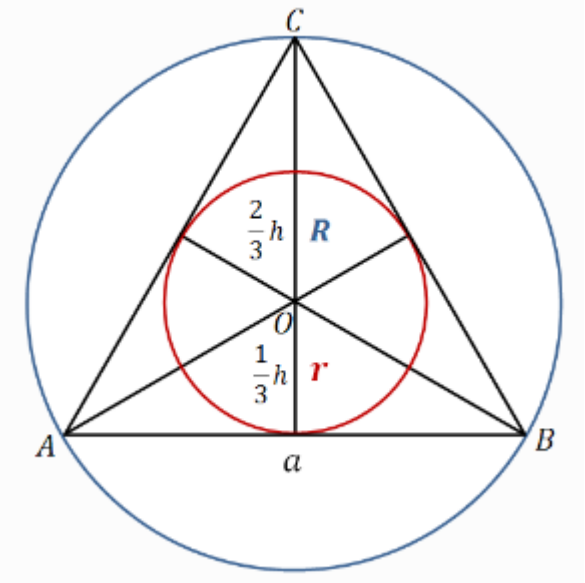
$$\tan\alpha = \frac{F_y}{F_x} = \frac{k\sqrt{3}\frac{q^2}{a^2}}{3k\frac{q^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha = 30^0$$

(2 boda)

b) (10 bodova)

Kretanje naboja na trouglu koji rotira možemo zamisliti kao kružno kretanje. Stoga, magnetnu indukciju u centru trougla možemo aproksimirati sa magnetnom indukcijom u centru kružnog provodnika radijusa: $R = \frac{2}{3}h$,



gdje je h visina trougla koja iznosi:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Tako da je:

$$R = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

(3 boda)

Magnetna indukcija u centru kružnog provodnika radijusa R je data formulom:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R},$$

(2 bod)

gdje je I struja usljed tri nalektrisanja ukupnog naboja $4q$ koji se kreću periodično sa periodom T. Tada je:

$$I = \frac{4q}{T} = \frac{4q\omega}{2\pi}$$

(3 boda)

Konačno, magnetna indukcija u centru trougla je:

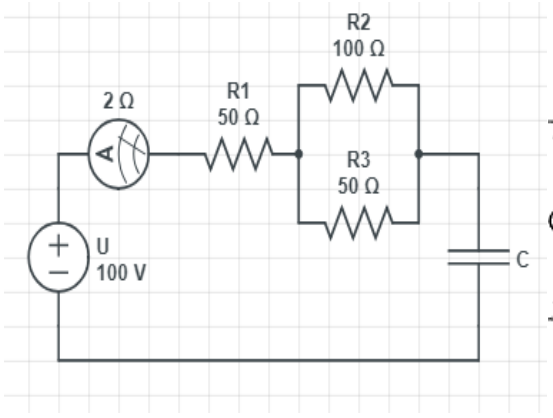
$$B = \frac{\mu_0\cdot\frac{4q\omega}{2\pi}}{2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3}}$$

$$B = \frac{3\mu_0 q\omega}{\pi a\sqrt{3}}$$

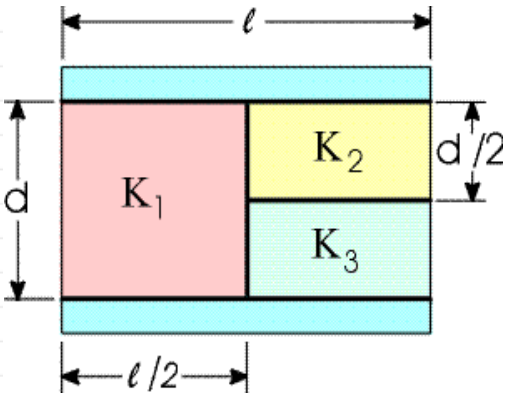
(2 boda)

2. Zadatak (30 bodova)

Jedan mladi fizičar dobio je zadatak da provjeri šta se dešava sa kondenzatorom u kolu istosmjerne struje. Za izvršenje ovog zadatka dobio je 3 otpornika otpornosti $R_1 = R_3 = 50\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, ampermetar unutrašnjeg otpora $R_A = 2\ \Omega$, izvor napona od 100 V i neki idealni kondenzator čije su ploče međusobno razmaknute 1 nm i površine su od 4 cm^2. Odlučio je spojiti šemu kao na slici 2, a kondenzator je u sebi imao 3 različita dielektrika raspoređena kao što je prikazano na slici 3.

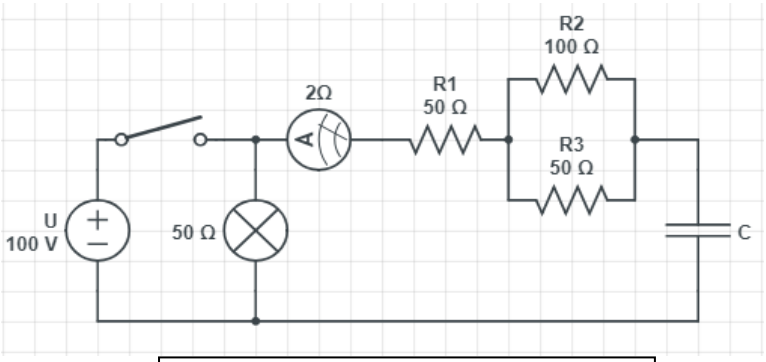


Slika 2: Šema uz 2. zadatak



Slika 3: Kondenzator iz 2. zadatka

a) Kako se ponaša idealni kondenzator u kolu istosmjene struje? Objasniti! **(3 boda)**
b) Kolika je razlika potencijala između njegovih ploča ako je ampermetar izmjerio struju jačine $I_A = 0{,}5$ A? Vremenska konstanta (τ) RC kola istosmjerne struje se definiše kao proizvod ukupnog otpora grane u kojoj se nalazi kondenzator i kapaciteta kondenzatora. Koliko iznosi vremenska konstanta ovog kola? (konstante dielektrične popustljivosti iznose $K_1 = 3{,}5$, $K_2 = 2$, $K_3 = 2{,}2$) **(8 bodova)**
c) Sada je u kolo dodao prekidač i sijalicu kao što je prikazano na slici 4. Kada je prekidač uključen, sijalica sija i ima neku snagu, a kada je isključio prekidač, fizičar je primjetio kratak bljesak na sijalici. Zašto se ovo desilo? Koliki je odnos snaga na sijalici neposredno prije i neposredno poslije isključenja? **(10 bodova)**
d) U praksi ne postoji idealni kondenzator nego on ima važnost u teoriji električnih kola. Ono što ima fizičar je realni kondenzator koji se može predstavti kao serijski ili paralelni spoj idealnog kondenzatora C i otpornika R koji predstavlja gubitke u dielektricima. Da bi izračunao R svog kondenzatora, fizičar u šemu kola koja je sada kao na prvoj slici, umjesto otpornika R_1, R_2 i R_3 stavlja voltmetar u seriju sa ampermetrom te isti takav voltmetar stvalja i paralelno sa kondenzatorom. Unutrašnji otpor voltmetara je $R_V = 10$ MΩ, a voltmetar koji je paralelno vezan sa kondenzatorom je izmjerio 30 V. Koliko iznosi R? Šta pokazuje ampermetar? **(9 bodova)**



Slika 4: Kolo iz c) dijela 2. zadatka

Rješenje zadatka:

a) (3 boda)

Idealni kondenzator u kolu istosmjerne struje predstavlja prekid u grani u kojoj se nalazi. Idealni kondenzatot će propuštati struju neko vrijeme dok se ne napuni zavisno od svog kapaciteta, a kada se napuni kroz njega struja više ne teče te se uzima da napunjeni idealni kondenzator tada ima beskonačan otpor. **(3 boda)**

b) (8 bodova)

Kondenzator sa više dielektrika se može predstaviti kao spoj više kondenzatora gdje svaki od njih ima svoju dielektričnu popustljivost. Vidimo iz slike da se naš kondenzator može predstaviti kao takav spoj gdje su djelovi sa popustljivostima K_2 i K_3 vezani serijski te su u paralelnoj vezi sa K_1 djelom. Neka su C_1, C_2 i C_3 njihovi kapaciteti. Dobijamo:

$$C_1 = \frac{\mathcal{E}_0 K_1 A}{2d}, \quad C_2 = \frac{\mathcal{E}_0 K_2 A}{d} \quad i \quad C_3 = \frac{\mathcal{E}_0 K_3 A}{d}$$

(1,5 bod)

Nakon vezanja i računanja imamo:

$$C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = \frac{\mathcal{E}_0 A K_2 K_3}{d(K_2 + K_3)}$$

$$C = C_1 + C_{23} = \frac{\mathcal{E}_0 A}{d}\left(\frac{K_1}{2} + \frac{K_2 K_3}{K_2 + K_3}\right) = 11{,}06\ \mu\text{F}$$

(2,5 boda)

Takođe vezivanjem svih otpornosti dobijamo:

$$R_e = R_A + R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 85{,}33\ \Omega$$

(1 bod)

Ako raspišemo vanjsku petlju dobićemo:

$$U - I_A R_e - U_c = 0$$

$$U_c = U - I_A R_e = 57{,}33\ \text{V}$$

(2 boda)

Vremenska konstanta je jednaka proizvodu kapaciteta i ukupnog otpora grane u kojoj je kondenzator te iznosi:

$$\tau = R_e C = 0{,}943\ \text{ms}$$

(1 bod)

c) (10 bodova)

Bljesak se desio zato što se kondenzator koji se prethodno napunio sada ispraznio te se neko vrijeme pri odsustvu pravog izvora ponašao kao izvor u kolu.

(2 boda)

Neposredno prije isključivanja prekidača, kondenzator je u svojoj grani činio prekid pa je struja kroz nju bila jednaka nuli tako da je u kolu jedino bila aktivna sijalica i izvor pa je struja kroz sijalicu bila:

$$I_{prije} = \frac{U}{R_s} = \frac{100}{50} = 2\ \text{A},$$

(1 bod)

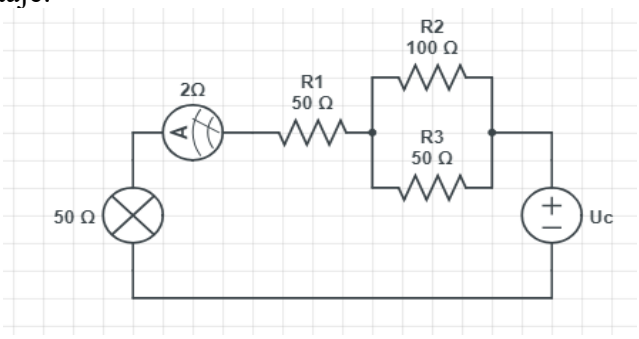
a zatim i snaga

$$P_{prije} = {I_{prije}}^2 \cdot R_s = 200\ \text{W}$$

(1 bod)

Raspišemo li vanjsku petlju vidjećemo da je $U = U_c$ **(1 bod),** odnosno napon na kondenzatoru je jednak naponu izvora.

Zatim isključujemo prekidač i kondenzator se počne prazniti te se ponaša kao izvor, a šema kola postaje:



(1 bod)

Struja kroz sijalicu je tada

$$I_{poslije} = \frac{U_c}{R_e + R_s} = \frac{100}{85{,}33 + 50} = 0{,}74\ \text{A},$$

(1,5 bod)

a snaga je:

$$P_{poslije} = {I_{poslije}}^2 \cdot R_s = 27{,}4\ \text{W}$$

(1,5 bod)

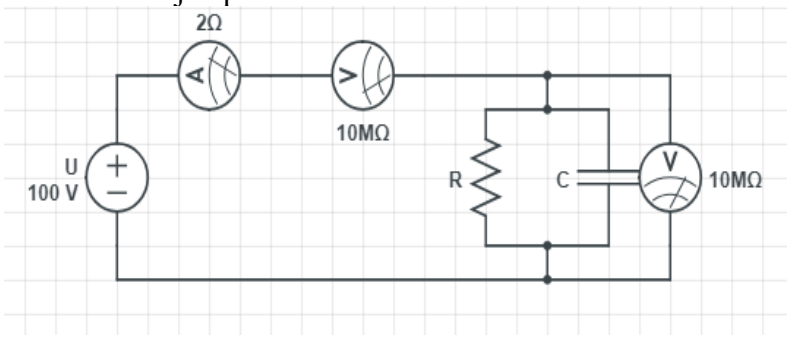
Odnos snaga je:

$$\frac{P_{poslije}}{P_{prije}} = 0{,}137$$

(1 bod)

d) (9 bodova)

Nacrtamo li šemu kao što je opisano dobićemo:



(2 boda)

Zbog toga što je idealan, grana sa C kapacitetom otpada iz kola tako da imamo samo paralelnu vezu R i V. Raspisivanjem unutrašnje petlje između R i R_V i I Kirchoffovog zakona za njihov čvor dobićemo:

$$I_1 R = I_2 R_V$$

(1 bod)

gdje je I_1 struja kroz R, a I_2 struja kroz R_V i vrijedi $I = I_1 + I_2$ gdje je I ukupna struja u kolu koju ujedno pokazuje i ampermetar **(1 bod)**.

$$I_1 R = U_V,$$

(1 bod)

pa onda

$$I_2 = \frac{U_V}{R_V} = 3\ \mu\text{A}$$

(1 bod)

Zatim raspisujemo vanjsku petlju i dobijamo:

$$U - I(R_A + R_V) = 0$$

odakle lahko možemo dobiti:

$$I = 6{,}99\ \mu\text{A}$$

(2 boda)

Iz I Kirchoffovog zakona dobijamo da je

$$I_1 = I - I_2 = 3{,}99\ \mu\text{A}$$

Na kraju iz jednačine

$$I_1 R = I_2 R_V$$

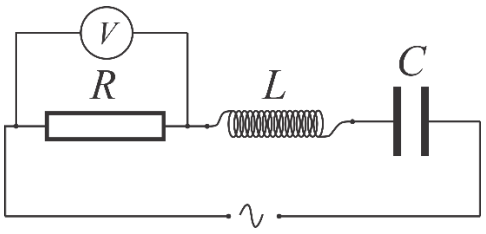
možemo dobiti

$$R = 7{,}52\ \text{M}\Omega$$

(2 boda)

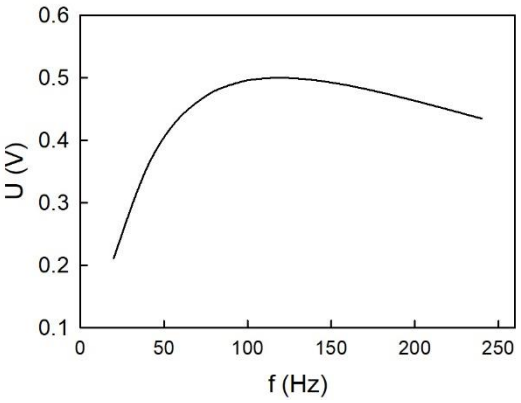
3. Zadatak (20 bodova)

Dato je strujno kolo kao na slici 5. Termogeni otpornik, zavojnica zanemarivog omskog otpora i induktiviteta 200 mH i kondenzator nepoznatog kapaciteta su spojeni serijski i priključeni na izvor naizmjenične struje čija se frekvencija može mijenjati. Na otporniku R se mjeri napon U pomoću idealnog voltmetra. Snimljena je ovisnost napona U od frekvencije izvora f i rezultati su grafički prikazani na slici 6.



Slika 5: Slika uz 3. zadatak

a) Objasniti zašto se mijenja napon na otporniku sa promjenom frekvencije izvora. **(6 bodova)**
b) Kako se naziva frekvencija pri kojoj napon dostiže maksimalnu vrijednost? Kakve su vrijednosti kapacitivnog i induktivnog otpora na ovoj frekvenciji? Zašto napon dostiže maksimalnu vrijednost nakon čega se smanjuje? **(5 bodova)**
c) Iz poznatih podataka i grafika izračunati kapacitet kondenzatora u kolu. **(6 bodova)**
d) Izračunati vrijednost kapacitivnog i induktivnog otpora za frekvenciju izvora od 50 Hz. **(3 boda)**



Slika 6: Ovisnost napona U od frekvencije f izvora

Rješenje zadatka:

a) (6 bodova)

Impedanca, odnosno ukupni otpor u kolu naizmjenične struje (Z) se računa kao:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \ (*),$$

(3 boda)

gdje je (ω) kružna frekvencija i povezana je sa frekvencijom izvora (f) kao:

$$\omega = 2\pi f \ \Rightarrow \ f = \frac{\omega}{2\pi}$$

(1 bod)

Jasno je da se impedanca (*) mijenja sa promjenom frekvencije izvora, a time se mijenja i jačina struje u kolu, odnosno pad napona na pojedinim elementima. **(2 boda)**

b) (5 bodova)

Frekvencija pri kojoj je jačina struje u kolu najveća, odnosno impedanca najmanja, naziva se rezonantna frekvencija (f_r).

(1 bod)

Na ovoj frekvenciji kapacitivni i induktivni otpor u kolu imaju istu vrijednost, odnosno vrijedi:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \ (**),$$

(2 boda)

pa je vrijednost impedance minimalna i iznosi$Z = R$, te je u tom slučaju jačina struje najveća, a time i pad napona na termogenom otporniku R. **(2 boda)**

c) (6 bodova)

Iz grafika se očitava/procijenjuje maksimalni napon na otporniku za frekvenciju $f_{rey} = 120$ Hz.

(1 bod)

Kako iz uslova (**) slijedi da je rezonantna frekvencija jednaka:

$$f_{rez} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

(2 boda)

vrijednost nepoznatog kapaciteta se računa kao:

$$C = \frac{1}{4\pi^2 {f_{rez}}^2 L} = 9 \cdot 10^{-6}\ \text{F}$$

(3 boda)

Napomena: Za rezonantnu frekvenciju prihvatiti očitanja u intervalu od 110 Hz do 130 Hz i u skladu tim i vrijednost kapaciteta kondenzatora.

d) (3 boda)

Induktivni otpor se računa kao:

$$X_L = \omega L = 2\pi f L = 2\pi \cdot 50\ Hz \cdot 0.2\ H = 62{,}8\ \Omega$$

(1.5 bod)

Kapacitivni otpor se računa kao:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi\ \cdot\ 50\ \text{Hz}\ \cdot\ 9 \cdot 10^{-6}\ \text{F}} = 353{,}85\ \Omega$$

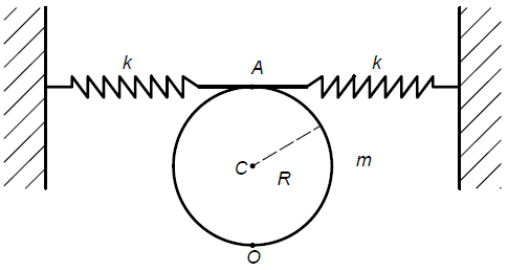
(1.5 bod)

4. Zadatak (25 bodova)

Homogeni valjak mase m može da rotira bez trenja oko fiksirane horizontalne ose (normalne na ravan slike 7) koja prolazi kroz njegov centar *C*. Za valjak su pričvršćene dvije jednake opruge koeficijenata elastičnosti k kao na slici 7. U datom trenutku opruge su nedeformisane.

a) Naći period malih oscilacija ovog sistema oko ravnotežnog položaja. **(10 bodova)**

b) Koliki bi bio period malih oscilacija sistema kada bi fiksna osa prolazila kroz tačku *O*? **(15 bodova)**



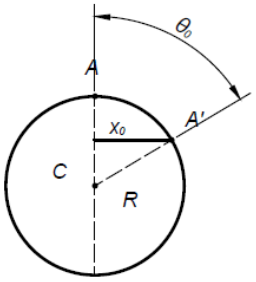
Slika 7: Slika uz 4. zadatak

Moment inercije valjka je: $I = \frac{mr^2}{2}$

Rješenje zadatka:

a) (10 bodova)

Neka je u amplitudnom položaju valjak otklonjen od ravnotežnog položaja za mali ugao θ_0.



Tada je desna opruga sabijena, a lijeva izdužena za:

$$x_0 = Rsin\theta_0 \approx R\theta_0$$

(1 bod)

Potencijalna energija sistema je:

$$E_1 = 2\frac{1}{2}kx_0^2 = kR^2\theta_0^2$$

(1 bod)

U ravnotežnom položaju valjak ima samo kinetičku energiju:

$$E_2 = \frac{1}{2}I\omega_r^2 = \frac{1}{4}mR^2\omega_r^2,$$

gdje je ω_r ugaona brzina rotacije.

(1 bod)

Brzina tačke u ravnotežnom položaju je:

$$v = x_0\omega_0,$$

iz osnovne jednačine oscilovanja $x = x_0\cos(\omega_0 t)$.Može se pisati kao:

$$v = R\omega_r$$

Veza između ugaone brzine rotacije i kružne frekvencije oscilovanja je:

$$R\omega_r = x_0\omega_0 = R\theta_0\omega_0$$

$$\omega_r = \theta_0\omega_0$$

(4 boda)

Dalje je:

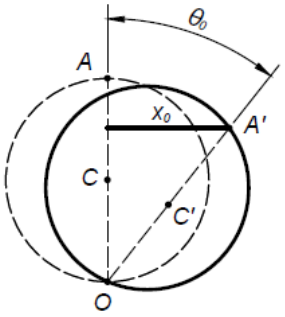
$$E_1 = E_2 \Rightarrow kR^2\theta_0^2 = \frac{mR^2}{4}\omega_0^2\theta_0^2$$

$$\omega_0 = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(3 boda)

b) (15 bodova)

Za razliku od prethodnog slučaja, sada postoji i promjena potencijalne energije valjka pri prelasku iz amplitudnog u ravnotežni položaj, jer se mijenja visina centra mase:



$$\Delta E_p = mgR(1 - cos\theta_0)$$

Za male uglove $cos\theta_0 \approx 1$, pa je ta promjena energije zanemariva.**(3 boda)**
Po Štejnerovoj teoremi moment inercije za ovaj slučaj je:

$$I = I_0 + mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2$$

(4 boda)

Za mali ugao θ_0:

$$x_0 = 2Rsin\theta_0 \approx 2R\theta_0$$

(2 boda)

Slijedi:

$$2\frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}I\omega_r^2 \Rightarrow k(2R\theta_0)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2 + mR^2\right)\omega_r^2,$$

ponovo je

$$\omega_r = \theta_0\omega_0$$

$$4kR^2\theta_0^2 = \frac{3}{4}mR^2\omega_0^2\theta_0^2$$

$$\omega_0 = 4\sqrt{\frac{k}{3m}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3m}{k}}$$

(6 bodova)

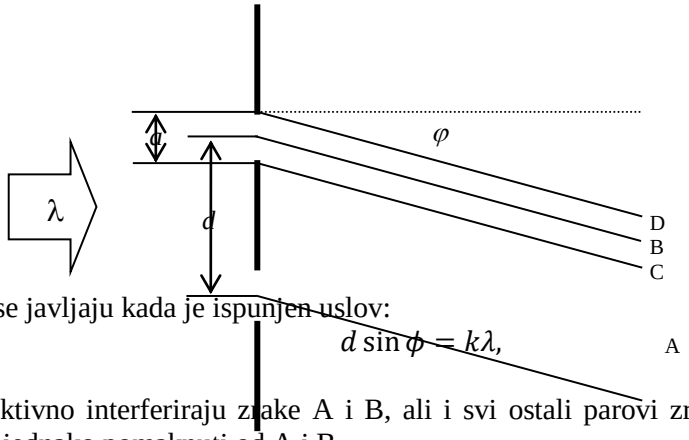
C: OPTIKA I ATOMSKA FIZIKA

1. zadatak (25 bodova)

Svjetlost talasne dužine 630 nm iz dalekog izvora pada okomito na ploču na kojoj se nalaze dvije međusobno paralelne i jednako široke pukotine, čija su središta međusobno udaljena 0,84 mm. Interferentna slika posmatra se na ekranu udaljenom nekoliko metara od pukotina. Zapaženo je da nedostaje treći maksimum, dok se prvi, drugi, četvrti, ... maksimumi pojavljuju. Koliko su široke pukotine? Koji bi još maksimumi trebali nedostajati? Koji bi maksimumi izostali ako promijenimo talasnu dužinu svjetlosti na 400 nm?

RJEŠENJE:

Na slici je prikazana interferencija zraka na dvije pukotine.



Maksimumi se javljaju kada je ispunjen uslov:

$$d \sin\phi = k\lambda,$$

(5b)

kada konstruktivno interferiraju zrake A i B, ali i svi ostali parovi zraka iz gornje i donje pukotine jednako pomaknuti od A i B.

Svaka pukotina daje minimum za:

$$a \sin\phi = m\lambda,$$

(5b)

gdje je *m* cijeli broj, a tada se zrake od C do D za gornju pukotinu međusobno ponište.

Treći maksimum za dvije pukotine javio bi se za ugao:

$$\sin\phi = \frac{3\lambda}{d}.$$

(2b)

Za taj ugao svaka pukotina prema uslovu zadatka daje minimum, pa je

$$a\frac{3\lambda}{d} = m\lambda,$$

(2b)

odakle dobijamo

$$a = \frac{d}{3} = 0{,}28\ mm.$$

(1b)

Sljedeći minimumi se javljaju za:

$$\sin\phi = \frac{m\lambda}{a} = \frac{3m\lambda}{d} = \frac{k\lambda}{d}.$$

Na osnovu posljednje jednakosti zaključujemo da je $k = 3m$, tj. 3., 6., 9., 12... maksimumi se neće pojaviti.

(5b)

Za drugu talasnu dužinu opet izostaju $k = 3., 6., 9., 12$ ... maksimumi, jer izvedena formula ne zavisi od talasne dužine. Promjenom talasne dužine promijenit će se uglovi ϕ. **(5b)**

2. zadatak (20 bodova)

Zagrijali smo metalnu ploču na temperaturu od 1000 K. Zatim, jednoj polovici ploče temperaturu smanjimo za 10%, dok drugoj polovici povećamo temperaturu za 10%. Za koliko procenata će se promijeniti snaga koju emituje ta ploča? Ploču smatrati apsolutno crnim tijelom.

RJEŠENJE:

$T_0 = 1000\ K$

$T_{1'} = 0{,}9\ T_0 = 900\ K$

$T_{1''} = 1{,}1\ T_0 = 1100\ K$

$\frac{\Delta P}{P_0} = ?$

(1b)

Snaga ploče na početku je:

$$P_0 = \sigma \cdot {T_0}^4 \cdot S \qquad \textbf{(5b)}$$

Snaga ohlađene polovice je:

$$P_{1'} = \sigma \cdot {T_{1'}}^4 \cdot \frac{S}{2} \qquad \textbf{(2b)}$$

dok je snaga zagrijane polovice:

$$P_{1''} = \sigma \cdot {T_{1''}}^4 \cdot \frac{S}{2} \qquad \textbf{(2b)}$$

Ukupna snaga koju emituje ploča je tada:

$$P_1 = P_{1'} + P_{1''} \qquad \textbf{(2b)}$$

Formula za procentualnu promjenu snage je:

$$\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{P_1 - P_0}{P_0} \qquad \textbf{(4b)}$$

Pa imamo:

$$\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{P_1 - P_0}{P_0} = \frac{\sigma \cdot {T_{1'}}^4 \cdot \frac{S}{2} + \sigma \cdot {T_{1''}}^4 \cdot \frac{S}{2} - \sigma \cdot {T_0}^4 \cdot S}{\sigma \cdot {T_0}^4 \cdot S} = \frac{\frac{{T_{1'}}^4}{2} + \frac{{T_{1''}}^4}{2} - {T_0}^4}{{T_0}^4}$$

$$\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{P_1 - P_0}{P_0} = \frac{\frac{(900\ K)^4}{2} + \frac{(1100\ K)^4}{2} - (1000\ K)^4}{(1000\ K)^4} = 0{,}06 = 6\%$$

Dakle, snaga se promijeni za 6%.

(4b)

3. zadatak (25 bodova)

Napomena: Dijelovi zadatka nisu međusobno povezani.

a) Svake sekunde Sunce emituje $3{,}8 \cdot 10^{26}$ J energije, većinski u obliku fotona u ultraljubičastom, vidljivom i infracrvenom dijelu spektra. Odrediti promjenu mase Sunca u jedinici vremena kao posljedicu emitovanja ovih fotona. Koliko vremena bi trebalo da Sunce "nestane"? Masa Sunca iznosi $2 \cdot 10^{30}$ kg.

b) Odrediti minimalnu temperaturu vodikovog gasa na kojoj se može uočiti emisija fotona u vidljivom dijelu spektra. Srednja kinetička energija translatornog kretanja molekule određuje se po formuli $\overline{E_K} = \frac{3}{2} k_B T$, pri čemu je $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K Boltzmannova konstanta, a T apsolutna temperatura.

c) Vrijeme života vodikovog atoma u prvom pobuđenom stanju iznosi oko 10^{-9}s. Odrediti širinu ovog energetskog stanja (tj. neodređenost energije stanja). Vrijednost Planckove konstante je $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Js.

RJEŠENJE:

a) Primjenom zakona održanja energije na sistem Sunce – emitovani fotoni, dobijamo relaciju:

$$E_{0_1} = E_{0_2} + E_{fotona}$$

(2b)

Energija mirovanja tijela iznosi $E_0 = mc^2$. Uvrštavanjem u prethodnu relaciju dobijamo:

$$m_1 c^2 = m_2 c^2 + E_{fotona}$$
$$m_1 c^2 - m_2 c^2 = E_{fotona}$$

Uzimajući u obzir da je $\Delta m = m_2 - m_1$ **(1 bod)**, slijedi:

$$-\Delta m c^2 = E_{fotona}$$
$$\Delta m = -\frac{E_{fotona}}{c^2}$$

(2b)

Uvrstimo zadane vrijednosti:

$$\Delta m = -\frac{3{,}8 \cdot 10^{26}\text{J}}{(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}$$
$$\Delta m = -4{,}2 \cdot 10^9 \text{ kg}$$

(1b)

Negativan predznak ukazuje na to da Sunce gubi masu (više od 4 milijarde kilograma po sekundi).

(1b)

Kako je brzina gubitka mase Sunca:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = -4{,}2 \cdot 10^9 \frac{\text{kg}}{\text{s}},$$

možemo zaključiti da je vrijeme potrebno za "nestanak" Sunca

$$\tau = \frac{M_{Sunca}}{\frac{\Delta m}{\Delta t}} = 4{,}8 \cdot 10^{20}\text{s}$$
$$\tau = 1{,}5 \cdot 10^{13}\text{godina}$$

(3b)

b) Sudar dva atoma vodika mora osigurati dovoljno energije za ekscitaciju jednog od atoma na energetski nivo sa kvantnim brojem n = 3 ili većim. Nakon toga se može desiti

prelaz na energetski nivo sa kvantnim brojem n = 2 i emisija fotona čije talasne dužine odgovaraju vidljivom dijelu spektra (Balmerova serija).

(2b)

Srednja kinetička energija čestice gasa (termalna energija) na apsolutnoj temperaturi T definisana je relacijom:

$$\overline{E_K} = \frac{3}{2}k_B T$$

pri čemu je $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$ (Boltzmannova konstanta).

Vodikov atom u osnovnom stanju (n = 1) sa energijom E_1 treba dodatnu energiju ΔE da bi bio doveden u stanje sa energijom E_3 (n = 3). Iz zakona održanja energije za taj vodikov atom slijedi:

$$E_1 + \Delta E = E_3$$

(2b)

Uz pretpostavku da je ta dodatna energija ΔE zapravo termalna energija, te koristeći izraz za energije atoma u n-tom stacionarnom stanju:

$$E_n = \frac{-13{,}6\ \mathrm{eV}}{n^2}$$

(2b)

jednačina zakona održanja energije dobija oblik:

$$\frac{-13{,}6\ \mathrm{eV}}{1^2} + \frac{3}{2}k_B T = \frac{-13{,}6\ \mathrm{eV}}{3^2}$$

$$T = \frac{2(-13{,}6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J})}{3(1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K})}\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{1^2}\right)$$

$$T = 93000\ \mathrm{K}$$

(4b)

c) Širinu energetskog stanja određujemo na osnovu relacije neodređenosti energije nekog stanja:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}$$

pri čemu je Δt vrijeme života čestice u tom stanju.

(2b)

Nakon uvrštavanja vrijednosti dobijamo:

$$\Delta E = \frac{h}{4\pi \Delta t}$$

$$\Delta E = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}}{4\pi(10^{-9}\mathrm{s})}$$

$$\Delta E = 5{,}28 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{J}$$

(3b)

4. zadatak (30 bodova)

a) Dokazati da je nemoguće da se izotop $^{82}_{34}\mathrm{Se}$ raspada β^- raspadom, ali da je moguć dvostruki β^- raspad $^{82}_{34}\mathrm{Se} \rightarrow {}^{82}_{36}\mathrm{Kr} + 2e^- + 2\bar{\nu}$. Date su mase atoma: $m(^{82}_{34}\mathrm{Se}) = 81{,}916699\ u$, $m(^{82}_{35}\mathrm{Br}) = 81{,}916802\ u$, $m(^{82}_{36}\mathrm{Kr}) = 81{,}913481\ u$.

b) U eksperimentu je na raspolaganju 14g selenija, od čega 97% mase otpada na $^{82}_{34}\mathrm{Se}$. U periodu od 7960 sati, ukupno je detektovano 35 događaja koji se povezuju sa dvostrukim β^- raspadom. Pretpostavljajući efikasnost detektora od 6,2%, procijeniti vrijeme poluraspada $^{82}_{34}\mathrm{Se}$ i izraziti ga u godinama. Komentarisati dobijeni rezultat!

RJEŠENJE:

Postavka zadatka: **(1b)**

a) Pri običnom β^- raspadu, $^{82}_{34}\mathrm{Se} \rightarrow {}^{82}_{35}\mathrm{Br} + e^- + \bar{\nu}$, ukupna energija koja se oslobodi je

$$Q = (m_j(^{82}_{34}\mathrm{Se}) - m_j(^{82}_{35}\mathrm{Br}) - m_e)c^2.$$

Zanemarujući energiju veze elektrona, mase jezgara su jednake razlici masa atoma i odgovarajućeg broja elektrona. Slijedi da je

$$Q = (m_a(^{82}_{34}\mathrm{Se}) - m_a(^{82}_{35}\mathrm{Br}))c^2.$$

(2b)

Pošto je masa atoma $^{82}_{35}\mathrm{Br}$ veća od mase atoma $^{82}_{34}\mathrm{Se}$, Q je negativno, odnosno raspad se ne može spontano desiti.

(3b)

Pri dvostrukom β^- raspadu, analognim izvođenjem se pokazuje da je ukupna oslobođena energija

$$Q = (m_a(^{82}_{34}\mathrm{Se}) - m_a(^{82}_{36}\mathrm{Kr}))c^2.$$

Pošto je masa atoma $^{82}_{36}\mathrm{Kr}$ manja od mase atoma $^{82}_{34}\mathrm{Se}$, Q je pozitivno te se raspad (sa energetskog stanovišta) može desiti.

(3b)

b) Početna masa izotopa $^{82}_{34}\mathrm{Se}$ je 97% od ukupne mase Se:

$$m_0(^{82}_{34}\mathrm{Se}) = 0{,}97 m_0(\mathrm{Se}).$$

(2b)

Početni broj atoma $^{82}_{34}\mathrm{Se}$ je

$$N_0(^{82}_{34}\mathrm{Se}) = \frac{m_0(^{82}_{34}\mathrm{Se})N_A}{M}.$$

(2b)

Za atomsku masu $^{82}_{34}\mathrm{Se}$ uzimamo $82\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$.

(2b)

Efikasnost detektora jednak je odnosu broja detektovanih raspada i stvarnog broja raspada

$$e = \frac{N_{det}}{N_r}.$$

Slijedi da je broj raspada jednak

$$N_r = \frac{N_{det}}{e}.$$

(4b)

Ukupni broj raspada je

$$N_r = N_0(^{82}_{34}\mathrm{Se})\left(1 - e^{-\lambda t}\right).$$

(2b)

Pošto je broj raspada ubjedljivo manji od ukupnog početnog broja atoma, vrijedi da je broj raspada približno

$$N_r \approx N_0(^{82}_{34}\mathrm{Se})\,\lambda t.$$

(1b)

Veza konstante radioaktivnosti i perioda poluraspada je

$$\lambda = \frac{ln2}{T_{1/2}}.$$

(1b)

Slijedi da je vrijeme poluraspada

$$T_{1/2} = ln2 \cdot t \cdot \frac{N_0\left(^{82}_{34}\mathrm{Se}\right)}{N_r} = 1{,}11 \cdot 10^{20}\text{godina}.$$

(5b)

Ogroman red veličine vremena poluraspada pokazuje da je u pitanju izuzetno malo vjerovatan raspad (ali ipak moguć).

(2b)

D: CJELOKUPNA FIZIKA

Ah, ti čudni fotoni!

Za fotone kažemo da su svjetlosne čestice –kvantni elektromagnetnog zračenja. Fotoni su čestice koje imaju energiju, impuls, ali kažemo da nemaju masu, pa i pored toga poznato je da fotoni mogu gubiti energiju u gravitacionom polju.

U ovom zadatku razmatramo samo neke od čudnih svojstava fotona. Zadatak se sastoji od dva dijela A i B koji su međusobno nezavisni.

DIO A

I. Ako bismo fotonima frekvencije ν mogli pridružiti masu, kako biste je računali?**(0,25b)**

II. Fizičari Pound i Rebka su 1959. godine na univerzitetu Harvard[1] izveli eksperiment u kojem su pokazali da fotoni pri kretanju u gravitacionom polju mijenjaju svoju energiju, odnosno frekvenciju. Eksperiment je zamišljen na sljedeći način. Na tornju visine$H$(u tu svrhu korišten je Harvard Tower) postavlja se radioaktivni izotop ^{57}Fe koji emituje fotone γ-zračenja. Razlika između energetskih nivoa pobuđenog i osnovnog stanja jezgre ^{57}Fe je 14,4 keV. U blizini površine Zemlje postavlja se druga jezgra istog izotopa koja treba da apsorbuje emitovano γ-zračenje.

   a) Zbog uzmaka jezgre-emitera, dio energije fotona se prenosi na jezgru, pa se energija fotona usljed toga smanji. Zbog ovog smanjenja, jezgra-apsorber ne može da apsorbuje dati foton. Izračunati iznos u eV za koji se smanji energija emitovanog fotona ako je masa atoma^{57}Fejednaka $M_{Fe} = 56{,}935393u (u = 931{,}494095\ \text{MeV}/c^2)$.**(0,5b)**

   b) Problem oko uzmaka jezgre pri emisiji γ-zračenja riješen je koristeći tzv. Mössbauerov efekat[2] koji je otkriven godinu danaranije, a koji podrazumijeva da se jezgre ugrade u čvorišta kristalne rešetke čvrstih tijela i time se energija emitovanog fotona zanemarljivo malo smanji. Obrazložite zašto na ovaj način praktično ne dolazi do smanjenja energije fotona?**(0,5b)**

III. U eksperimentu jezgra-emiter postavlja se na visinu $H = 22{,}5$ m, a jezgra-apsorber u blizini površine Zemlje. Ako pretpostavimo da je gravitaciono polje homogeno jačine $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$, odredite relativnu promjenu frekvencije fotona usljed gravitacionog polja podpretpostavkom da foton ima masu koju ste izračunali pod I).**(1,75b)**

IV. Energija fotona se mijenja usljed djelovanja gravitacionog polja, pa jezgra-apsorber opet ne može da apsorbuje foton. Da bi se efekat gravitacionog polja kompenzirao, jezgra-apsorber pusti se da se kreće brzinom $v$po vertikalnoj osi. Obrazložite na koji način je neophodno da se jezgra-apsorber kreće i odredite brzinu kretanja jezgre-apsorbera da bi došlo do apsorpcije fotona γ-zračenja.**(1,75b)**

Ukupno 4,75 b

[1] R. V. Pound and G. A. Rebka, Jr., *Gravitational Red-Shift in Nuclear Resonance*, Phys. Rev. Lett. **3**, 439 (1959).

[2] R. L. Mössbauer, *Kernresonanzfluoreszenz von Gammastrahlung in Ir191*, Zeitschrift für Physik A,**151** (2): 124-143(1958).

DIO B

I. Pretpostavimo da su fotoni zarobljeni u posudi zapremine V. Zidovi posude održavaju se na konstantnoj termodinamičkoj temperaraturi T. Indijski fizičara Satheyandra Nathe Bose je 1924. godine pokazao da se Planckov zakon toplotnog zračenja može izvesti pod pretpostavkom da se fotoni ponašaju kao čestice gasa, tj. kao da imamo fotonski gas.

a) Koncentracija fotona (broj fotona po jedinici zapremine) može se računati kao

$$\frac{N}{V}=\frac{1}{\pi^2c^3}\int_0^\infty \frac{\omega^2}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}d\omega$$

gdje je $\omega=2\pi\nu$ kružna frekvencija fotona, k je Boltzmannova konstanta. Pokažite da vrijedi

$$\frac{N}{V}=\alpha T^3$$

i napišite ekplicitno čemu je konstanta α jednaka.**(ovaj dio možete prekočiti ako ne znate uraditi i nastaviti dalje, uzmite da je koncentracija poznata.)(2,25b)**

b) Ako pretpostavimo da se fotonski gas ponaša kao idealni gas, koliki je pritisak fotonskog gasa na stijenke posude? **(0,5b)**

c) Koliki je toplotni kapacitet fotonskog gasa pri konstantnoj zapremini ako se fotonski gas ponaša kao idealni jednoatomni gas?**(1,5b)**

II. Kada su astronomi 1960-tih godina počeli da proučavaju mikrotalase iz svemira, uočili su da bez obzira kako se radioteleskop usmjeri prema nebu, uvijek se detektuju smetnje u mikrotalasnom području. Ove smetnje nazvane su *kosmičko mikrotalasno pozadinsko zračenje*[3] i ne potiče od emisije nekog nebeskog tijela nego se smatra da je relikvija iz vremena nastanka svemira. Ono što je interesantno jeste da se spektar ovog zračenja savršeno slaže sa spektrom aposlutno crnog tijela.

a) Mjerenja su pokazala da je najintenzivnija talasna dužina u spektru kosmičkog mikrotalasnog pozadinskog zračenja jednaka $\lambda_0=1{,}063\,\text{mm}$. Odredite temperaturu crnog tijela kojaodgovara ovom zračenju.**(0,25b)**

b) Ako je konstanta $\alpha=2{,}03\cdot10^7\text{m}^{-3}\text{K}^{-3}$ odredite koncentraciju fotona koji odgovaraju emisiji kosmičkog mikrotalasnog pozadinskog zračenja **(0,25 b).**

c) Razlog zbog čega pozadinsko zračenje registrujemo danas u području mikrotalasa je širenje svemira. Zbog širenja svemira talasna dužina ovih fotona pomjera se u područje većih talasnih dužina i ovaj pomak zove se kozmološki crveni pomak. Faktor kosmološkog pomaka se definiše kao

$$z=\frac{\lambda'-\lambda}{\lambda}$$

gdje je λ' talasna dužina koja je detektovana, a λ talasna dužina koja je emitovana. Ako je poznato da je vrijednost faktora danas približno jednaka $z=1000$, odredite temperaturu fotonskog gasa u trenutku kada je pozadinskog zračenje nastalo.**(0,5b)**

(Ukupno 5,25b)

Konstante:

$c=3\cdot10^8\text{m/s}$, $h=6{,}626\cdot10^{-34}$ Js, $k=1{,}38\cdot10^{-23}\text{J/K}$, $b=2{,}9\cdot10^{-3}\text{Km}$,$\sigma=5{,}67\cdot10^{-8}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4}$

RJEŠENJE:

DIO A

I. Fotoni su relativističe čestice pa može koristi jednakost između energije i mase:

[3]A. A. Penzias.andR. W. Wilson, *A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s*, The Astrophysical Journal. 142 (1): 419–421 (1965).

$$E = m_\gamma c^2 \Rightarrow m_\gamma = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}$$

(0,25b)

II. Energija fotona odgovara razlici energija prvog pobuđenog i osnovnog stanja, $E_\gamma = 14{,}4$ keV.

a) Do uzmaka dolazi zbog zakona očuvanja impulsa koji vrijedi za zatvoreni sistem tako da imamo

$$p_\gamma = p_{Fe}$$

(0,25b)

odnosno, energija jezgre usljed uzmaka je

$$E_k = \frac{p_{Fe}^2}{2M_{Fe}} = \frac{p_\gamma^2}{2M_{Fe}} = \frac{1}{2M_{Fe}}\left(\frac{E_\gamma}{c}\right)^2 = 0{,}001955 \text{ eV}$$

Dakle, foton izgubi energiju u iznosu od 1,955 meV. **(0,25b)**

b) S obzirom da kristalna rešetka ima daleko veću masu od jezgre, kinetička energija uzmaka kristalne rešetke je daleko manja, pa foton gubi zanemarljivo malu energiju, praktično, gubitak energije je jednak nuli. **(0,5b)**

III. Energija fotona pri vrhu tornja je

$$E = h\nu + m_\gamma gH$$

(0,5b)

Energija pri površini Zemlje je

$$E' = h\nu'$$

(0,5b)

Na osnovu zakona očuvanja energija dobijamo da je $E = E'$:

$$h\nu' = h\nu + m_\gamma gH = h\nu + \frac{h\nu}{c^2}gH \Rightarrow \frac{h\nu' - h\nu}{h\nu} = \frac{gH}{c^2}$$

(0,5b)

Relativna promjena frekvencije je

$$\frac{\nu' - \nu}{\nu} = \frac{gH}{c^2}$$

(0,25b)

Dakle, dolazi do pocećanja frekvencije emitovanog fotona. Ovo povećanje frekvencije zovemo *plavi gravitacioni pomak* jer se frekvencija pomjerila ka većim frekvencijama.

IV. Plavi gravitacioni pomak može se kompenzirati crvenim Dopplerovim pomakom. Poznato je da ako se detektor udaljava od izvora, frekvencija registrovanog fotona se smanjuje u odnosu na frekvenciju koja je emitovana. Prema tome, jezgra-apsorber mora se kretati ravnomjernom brzinom prema dolje, udaljavajući se od jezgre-emitera. **(0,75b)**

Jezgra-apsorber ne kreće se relativstičkim brzinama tako da možemo koristiti formule za klasični Dopplerov efekat. Relativna promjena frekvencije pri klasičnom crvenom Dopplerovom pomaku je

$$\frac{|\nu' - \nu|}{\nu} = \frac{V}{c}$$

(0,5b)

gdje je V brzina jezgre-apsorbera. Izjednačvanjem relativnih promjena pri ova dva pomaka dobijamo

$$\frac{gH}{c^2} = \frac{V}{c} \Rightarrow V = \frac{gH}{c} = 73{,}575 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}$$

(0,5b)

(UKUPNO 4,75b)

DIO B

I. Koncentracija fotona u zapremini V zavisi od temperature.

a) Integral koji se pojavljuje u formulu za koncentraciju fotona može se pojednostaviti uvodeći smjenu

$$x = \frac{\hbar\omega}{kT} \Rightarrow \omega = \frac{kT}{\hbar}x \Rightarrow d\omega = \frac{kT}{\hbar}dx$$

(0,75b)

Granice integracije ostaju iste tako da dobijamo

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{\pi^2 c^3}\int_0^\infty \frac{\omega^2}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}d\omega = \frac{1}{\pi^2 c^3}\int_0^\infty \frac{\left(\frac{kT}{\hbar}x\right)^2}{e^x - 1}\frac{kT}{\hbar}dx = \frac{k^3T^3}{\pi^2 c^3 \hbar^3}\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1}dx$$

(1,25b)

Integral je broj čija je vrijednost nije neophodna u ovom zadatku. Vidimo da je

$$\alpha = \frac{k^3}{\pi^2 c^3 \hbar^3}\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1}dx$$

(0,25b)

I. Pritisak idealnog gasa je jednak

$$p = \frac{N}{V}kT = \alpha T^3 kT = \alpha k T^4$$

(0,5b)

II. Unutrašnja energija jednoatomnog indelanog gasa je

$$U = \frac{3}{2}NkT$$

(0,5b)

Tako da se unutrašnja energija fotonskog gasa može izračunati kao

$$U = \frac{3}{2}\alpha V T^3 kT = \frac{3}{2}\alpha V k T^4$$

(0,25b)

Toplotni kapacitet pri konstantnoj zapremini je jednak promjeni unutrašnje energije po jedinici temperature:

$$C_V = \frac{dU}{dT} = 6\alpha V k T^3$$

(0,75b)

III.

a) Poznato da je prema Wienovom zakonu pomjeranja, najintenzivnija talasna dužina u spektru apsolutno crnog tijela određena sa

$$\lambda_0 = \frac{b}{T} \Rightarrow T = \frac{b}{\lambda_0} = 2{,}728\ \text{K}$$

(0,25b)

b) Koncetracija tih fotona iz doba nastanka svemira danas iznosi

$$\frac{N}{V} = 2{,}03 \cdot 10^7 \text{m}^{-3}\text{K}^{-3} \cdot (2{,}728)^3 = 41{,}212 \cdot 10^7 \text{m}^{-3} \approx 412\ \text{cm}^{-3}$$

(0,25b)

c) Iz izraza koji je dat u tekstu zadataka dobijamo da je talasna dužina koja je emitovana

$$\lambda = \frac{\lambda'}{1+z} = \frac{1{,}063\ mm}{1+1000} = 1{,}062\ \mu\text{m}$$

(0,25b)

što odgovara temperaturi od

$$T = \frac{b}{\lambda} \approx 2730\ \text{K}$$

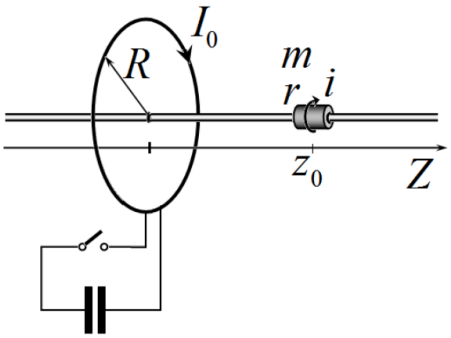
(0,25b)

(UKUPNO 5,25b)

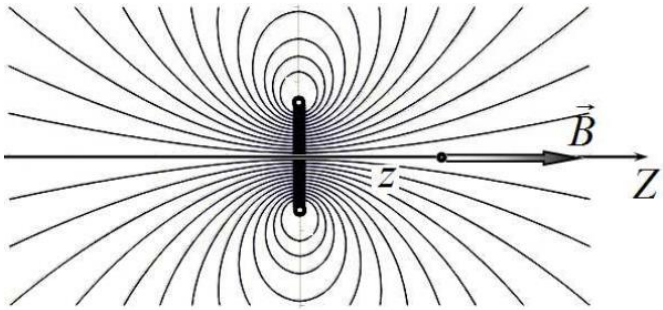
Gauss rifle

Elektromagnetne puške (Gauss rifle[1]) su jednostavne naprave koje se koriste kao oružje, a rade na principu ubrzavanja projektila magnetnim poljem, te se time ostvaruje velika brzina ispaljivanja projektila. Na sličnom principu rade i naprave pod nazivom Railgun[2] koje se sve više koriste kao oružje za ratovanje, a naročito ih koristi američka vojska.

Razmotrimo princip rada ovakve puške koristeći pojednostavljeni model. Postavimo tanku, dugu, neprovodnu i nemagnetnu šipku (slika 1) po kojoj se bez trenja može kretati mali, provodni, cilindrični projektil mase m i poluprečnika r, a magnetna svojstva cilindra će varirati u zadatku. Takođe, postavimo kružni provodni prsten poluprečnika R i otpornosti Y i zanemarljive induktivnosti, koji je fiksiran na poziciji $z = 0$ tako da mu je šipka osa simetrije (struja kroz prsten će varirati u zadatku). Prsten je spojen u kolo sa kondezatorom kapaciteta C koji je napunjen do napona U_0.



Slika 1: Model elektromagnetne puške



Slika 2: Magnetno polje struje koja protiče kroz kružni prsten

Napomene:

- Magnetno polje koje stvara struja I_0 koja protiče kroz kružni prsten poluprečnika R prikazano je na slici 2 (posmatrajući prsten s bočne strane). Magnetna indukcija na osi prstena na nekoj udaljenosti z je data kao:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I_0}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

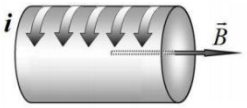
- Fluks vektora magnetne indukcije $\vec{B}$ kroz bilo koju zatvorenu površinu jednak je nuli.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Coilgun
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Railgun

a) (1.6 b) Pokažite da je radijalna komponenta magnetne indukcije prstena, na udaljenosti r od ose simetrije prstena data kao:

$$B_r(z) = -\frac{r}{2}\frac{dB_z(z)}{dz}.$$

b) (1.3 b) Nađite izraz za radijalnu komponentu magnetne indukcije prstena kojim teče struja I_0 na udaljenosti r od ose simetrije prstena (na omotaču projektila) u zavisnosti od koordinate z, tj. napišite izraz za $B_r(z)$, te skicirajte grafik funkcije $B_r(z)$.



Neka je projektil takvih magnetnih karakteristika da kroz njega protiče konstantna struja i po površni omotača cilindra kao što je prikazano na slici desno (struja na projektilu ne zavisi od vanjskog magnetnog polja prstena – ne može se indukovati dodatna struja, nego je konstantna i iznosi i).

Pretpostavite da je projektil zanemarljivo male dužine, tako da ga možete aproksimirati malim prstenom, tj. ne uzimajte promjenu magnetnog polja duž projektila.

c) (0.9 b) Nađite izraz za silu $F(z)$ magnetnog polja prstena kroz koji protiče struja I_0 koja djeluje na cilindrični projektil, kojim teče struja i, u zavisnosti od trenutne pozicije z projektila.

Za pitanja ispod smatrajte da kroz prsten u početnom trenutku ne protiče struja. Nakon zatvaranja prekidača sa slike 1 kondezator se počinje prazniti tako da počinje proticanje struje kroz prsten koje traje jako kratko (praktično, zanemarljiv vremenski interval).

d) (1.8 b) Nađite izraz za intezitet maksimalne brzine koju dobije projektil kojim teče konstantna struja i.
Pretpostavite da se projektil ne kreće tokom pražnjenja kondezatora. Ovu aproksimaciju možemo koristiti jer je pražnjenje kondezatora traje jako kratko, tako da i struja teče jako kratak vremenski interval. Struja će generisati magnetno polje koje će dati projektilu neku početnu brzinu (koja je ujedno i maksmalna) tako da će se projektil nastaviti kretati tom brzinom.

e) (0.6 b) Ukoliko polaritet kondezatora obrnemo, da li će se promijeniti smjer kretanja projektila? Vaš odgovor obrazložite.

Razmotrimo sada projektil istih dimnezija i mase, ali napravljan od mekog željeza, tako da se vrši proces namagnetisavanja projektila. To znači da struja koja kruži po omotaču projektila više nije konstantna, nego je proporcionalna vanjskom magnetnom polju na osi projektila, tj. data je izrazom $i = kB_z$ (uzmite u obzir da je i smjer struje i određen vanjskim magnetnim poljem, tj. komponentom B_z), gdje je k poznata konstanta.

f) (2.2 b) Nađite izraz za intezitet maksimalne brzine projektila u ovom slučaju.
Ponovo se koristite istim pretpostavkama kao za pitanje d), tj. da se projektil ne kreće tokom pražnjenja kondezatora.

g) (0.6 b) Ukoliko polaritet kondezatora obrnemo, da li će se promijeniti smjer kretanja projektila? Vaš odgovor obrazložite.

Neka je sada projektil (istih dimnezija i mase) superprovodan i neka ima induktivnost L.

h) (1.0 b) Nađite izraz za struju koja teče po površini projektila. Vaš odgovor izrazite preko veličina r, L i B_z.

Rješenje:

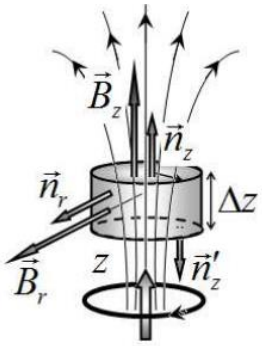
a) U tačkama na $z-$ osi magnetna indukcija ima samo komponentu B_z, dok u tačkama van $z-$ ose ima i radijalnu komponentu B_r. Posmatrajmo fluks kroz proizvoljni cilindar na $z-$ osi, takav da $z-$ osa prolazi kroz centar baza posmatranog cilindra (zamišljeni cilindar nema veze s cilindričnim projektilom, već nam služi samo kako bi posmatrali fluks magnetnog polja prstena neovisno o projektilu). Neka je zamišljeni cilindar visine Δz ($\Delta z \ll 1$)I poluprečnika baze r (slika 1), te neka se baza cilindra bliža prstenu nalazi na udaljenosti z od prstena. Fluks magnetne indukcije $\vec{B}$ kroz površ $d\vec{S}$ definišemo kao:

$\int \vec{B} \cdot d\vec{S}$, odakle slijedi da je fluks kroz bazu cilindra koja je bliža prstenu: $\Phi_1 = -B_z(z)\pi r^2$, dok je fluks kroz drugu bazu $\Phi_2 = B_z(z+\Delta z)\pi r^2$, te fluks kroz omotač cilindra $\Phi_3 = B_r \cdot 2\pi r \Delta z$. ($\mathbf{0.9\ b}$)Kako je fluks magnetnog polja kroz zatvorenu površ jednak nuli (u ovom slučaju, površ na kojoj smo posmatrali fluks je cilindar), slijedi da je $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0$, tj. $-B_z(z)\pi r^2 + B_z(z+\Delta z)\pi r^2 + B_r \cdot 2\pi r \Delta z = 0$($\mathbf{0.2\ b}$), odakle slijedi da je:

$$B_r = -\frac{r}{2} \cdot \frac{B_z(z+\Delta z) - B_z(z)}{\Delta z} = -\frac{r}{2} \cdot \frac{dB_z(z)}{dz},$$

što je I trebalo pokazati. ($\mathbf{0.5\ b}$)

Napomena: Cilindričnu površ smo odabrali jer je potpuno simetrična za ovaj slučaj. Slično kao što često odaberemo sferu pri primjeni Gaussovog zakona.



Slika uz dio a)

b) Koristeći izraz $B_r(z) = -\frac{r}{2} \cdot \frac{dB_z(z)}{dz}$ i izraz za magnetnu indukciju prstena na njegovoj osi simetrije $B_z(z) = \frac{\mu_0 I_0}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ (oba izraza su data u tekstu zadatka), jednostavno izražavamo radijalnu komponentu kao:

$$B_r(z) = -\frac{r}{2} \cdot \frac{dB_z(z)}{dz} = -\frac{r}{2} \cdot \frac{d}{dz}\left(\frac{\mu_0 I_0}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$
$$= \frac{3\mu_0 I_0 R^2 r}{4} \cdot \frac{z}{(R^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}. (\mathbf{0.4\ b})$$

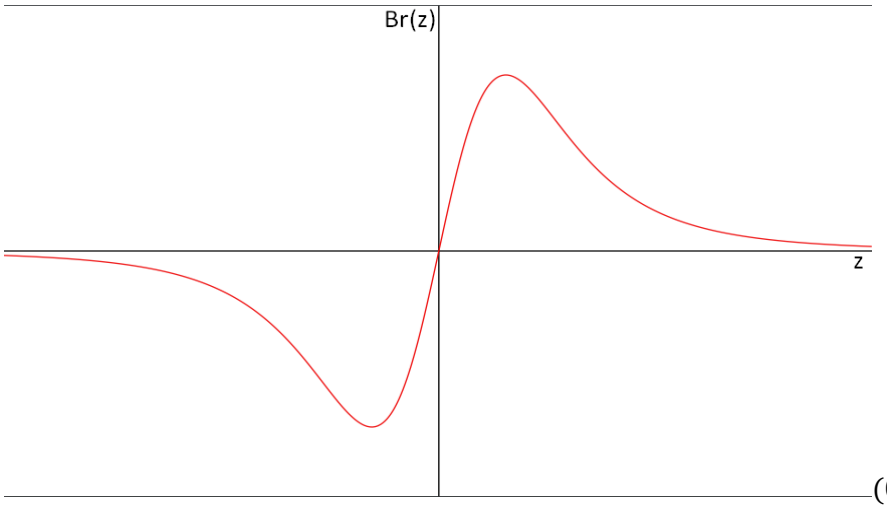
Sada je potrebno skicirati grafik funkcije $B_r(z)$.

Kako je $R > 0$, onda je $R^2 + z^2 \neq 0, \forall z \in \mathbb{R}$, pa je funkcija definisana za $\forall z \in \mathbb{R}$. Dalje, $B_r(z) = 0$ za $z = 0$ što je nula funkcije. Kako je $B_r(-z) = -B_r(z)$funkcija je neparna, tako da je simetrična u odnosu na koordinatni početak. Primijetimo da kada $z \to \pm\infty$, tada $B_r(z) \to \pm 0$. Potražimo još ekstreme funkcije.

$$\frac{dB_r(z)}{dz} = \frac{3\mu_0 I_0 R^2 r}{4} \cdot \frac{(R^2+z^2)^{\frac{5}{2}} - 5z^2(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}{(R^2+z^2)^5} = 0$$

Odakle slijedi da je $z = \pm\frac{R}{2}$.

Primijetimo da za $z = \frac{R}{2}$ dobijemo da je B_r pozitivno, a za $z = -\frac{R}{2}$ negativno. Drugi izvod funkcije $B_r(z)$ može nam potvrditi da je za $z = \pm\frac{R}{2}$maksimum, odnosno, minimum funkcije. Na osnovu prethodne analize funkcije, možemo skicirati grafik koji je dat na slici ispod (mogli smo ući u dosta dublju analizu funkcije, međutim, prethodno napisana analiza I intuicija su nam dovoljni da dovoljno dobro skiciramo grafik funkcije). ($\mathbf{0.7\ b}$)



$(\mathbf{0.2\ b})$

c) Elementarna Amperova sila koja djeluje na djelić cilindra je $d\vec{F} = id\vec{l} \times \vec{B}(\mathbf{0.1\ b})$, gdje $d\vec{l}$ ima smjer struje.Kako je $\vec{B} = \overrightarrow{B_z} + \overrightarrow{B_r}$, a vektor $d\vec{l}$ je usmjeren kružno oko $z-$ ose, tako da imamo:

$$d\vec{F} = id\vec{l} \times \overrightarrow{B_z} + id\vec{l} \times \overrightarrow{B_r}, (\mathbf{0.1\ b})$$

Što nakon vektorskog množenja I integrisanja po cijeloj kružnici poluprečnika$r$ (poluprečnik cilindra) daje silu:

$$F = 2\pi r i B_r (\mathbf{0.6\ b}).$$

Napomena: Pri vektorskom množenju u izrazu iznad, prvi član će dati silu usmjerenu radijalno, dok će drugi član dati silu usmjerenu u negativnom pravcu$z$ ose, ali smo u obzir uzeli samo intezitet. Nakon integrisanja po kružnici, sila koja je usmjerena radijalno je anulirana, tj. djelići sile su djelovali radijalno i međusobno se poništili kada se posmatraju na cijeloj kružnici, tj. Pri integraciji.

Uvrstimo još izraz za radijalnu komponentu magnetne indukcije izvedenu u dijelu b):

$$F = \frac{3\pi\mu_0 I_0 R^2 r^2 i}{2} \cdot \frac{z}{(R^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} . (\mathbf{0.1\ b})$$

d) Na projektil djeluje samo Amperova sila, pa prema II Njutnovom zakonu imamo da vrijedi:

$$m\frac{dv}{dt} = F = \frac{3\pi\mu_0 I_0 R^2 r^2 i}{2} \cdot \frac{z}{(R^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

gdje je I_0 trenutna struja koja protiče kroz prsten, a z pozicija na kojoj se nalazi projektil.

Napomena: Smjer sile$F$ smo uzeli u pozitivnom smjeru $z-$ ose. Priznaje se I suprotan smjer jer nismo naglasili smjer struja, tako da nas trenutno zanimaju samo inteziteti.

Pri zavaranju prekidača, struja kroz prsten će brzo skočiti do maksimalne vrijednosti (u teoriji, momentalno), te će, kako se prazni kondezator, I opadati (zbog otpornosti prstena električna energija će se trošiti na toplotu). Nakon određenog vremenskog interval struja kroz prsten će biti nula (taj vremenski interval zavisi od električnih parametara sistema, ali je u zadatku rečeno da pretpostavljamo da je jako kratak). $(\mathbf{0.5\ b})$

Kako se kondezator prazni, vrijedi $I_0 = -\frac{dq}{dt}(\mathbf{0.3\ b})$što možemo uvrstiti u izraz iznad, tako da dobijemo:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{3\pi\mu_0 R^2 r^2 i}{2} \cdot \frac{z}{(R^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{dq}{dt},$$

Što dalje daje:

$$mdv = -\frac{3\pi\mu_0 R^2 r^2 i}{2}\cdot\frac{z}{(R^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\cdot dq$$

$$m\int_0^v dv = -\frac{3\pi\mu_0 R^2 r^2 i}{2}\cdot\frac{z}{(R^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\int_q^0 dq$$

$$mv = \frac{3\pi\mu_0 R^2 r^2 i}{2}\cdot\frac{z}{(R^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\cdot q$$

gdje je $q = CU_0$ (uzima se maksimalna vrijednost naelektrisanja jer tražimo maksimalnu vrijednost brzine).

Pa je:

$$v = \frac{3\pi\mu_0 R^2 r^2 i}{2m}\cdot\frac{z}{(R^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\cdot CU_0. \ (\mathbf{0.5\ b})$$

Kako bi našli maksimalnu brzinu, potrebno je naći rješenje jednačine$\frac{dv}{dz} = 0$, tj. Poziciju na koju ćemo postaviti projektil u početnom trenutku tako da dobije maksimalnu brzinu, tako da trebamo riješiti$\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(R^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right) = 0$, što smo računali u dijelu c), tako da je $z = \pm\frac{R}{2}$, tako da je intezitet maksimalne brzine:

$$v_{max} = \frac{24\pi\mu_0 r^2 i C U_0}{25\sqrt{5}mR^2}. \ (\mathbf{0.5\ b})$$

e) Promjenom polariteta kondezatora, mijenja se smjer struje kroz prsten, a tako I smjer sile pa I brzine projektila, tj. Smjer brzine je suprotan.($\mathbf{0.6\ b}$)

f) Ponovo na projektil djeluje Amperova sila $F = \frac{3\pi\mu_0 I_0 R^2 r^2 i}{2}\cdot\frac{z}{(R^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$, gdje su sada $I_0 i i$ trenutne vrijednosti struje kroz prsten, odnosno cilindar.

Uvrštavanjem izraza za struju ($i = kB_z = k\frac{\mu_0 I_0}{2}\cdot\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$) kroz cilindar, imamo da je sila oblika:

$$F = \frac{3\pi\mu_0 I_0 R^2 r^2}{2}\cdot\frac{z}{(R^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\cdot k\frac{\mu_0 I_0}{2}\cdot\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$F = \frac{3k\pi{\mu_0}^2 R^4 r^2 {I_0}^2}{4}\cdot\frac{z}{(R^2+z^2)^4}.$$

Pa kao u prethodnom dijelu:

$$m\frac{dv}{dt} = F = \frac{3k\pi{\mu_0}^2 R^4 r^2 {I_0}^2}{4}\cdot\frac{z}{(R^2+z^2)^4},$$

odakle je:

$$dv = \frac{3k\pi{\mu_0}^2 R^4 r^2 {I_0}^2}{4m}\cdot\frac{z}{(R^2+z^2)^4}dt \ (\mathbf{0.6\ b})$$

Međutim, sada brzina nije proporcionalna struji kroz prsten, tj. Naelektrisanju na kondezatoru, tako da moramo postupiti drugačije.

Energija kondezatora se pretvara u Joulovu toplotu koja se oslobađa na prstenu.

Joulova toplota koja se oslobađa pri proticanju struje kroz prsten je:

$$dQ = YI_0^2 dt,$$

tako da je možemo uvrstiti u izraz za dv (zamijenimo $I_0^2 dt$ sa $\frac{dQ}{Y}$), tako da dobijemo:

$$\int_0^v dv = \frac{3k\pi{\mu_0}^2 R^4 r^2}{4mY}\cdot\frac{z}{(R^2+z^2)^4}\int_{\frac{CU_0^2}{2}}^0 dQ,$$

odakle je:

$$v = -\frac{3k\pi{\mu_0}^2R^4r^2}{4mY}\cdot\frac{z}{(R^2+z^2)^4}\cdot\frac{CU_0^2}{2}, (\mathbf{1.1\ b})$$

Gdje smo uzeli maksimalnu vrijednost energije kondezatora jer tražimo maksimalnu brzinu.

Potrebno je još riješiti jednačinu $\frac{dv}{dz}=0$, tj. $\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(R^2+z^2)^4}\right)=0$, odakle je $z=\pm\frac{R}{\sqrt{7}}$ (uzet ćemo pozivinu vrijednost jer smo tako krenuli rješavati zadatak, tj. pretpostavili da se projektil nalazi s desne strane prstena), tako da je maksimalna brzina:

$$v_{max} = -\frac{3}{8\sqrt{7}}\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^4\cdot\frac{k\pi{\mu_0}^2r^2CU_0^2}{mYR^3}(\mathbf{0.5\ b})$$

Minus nam govori da će projektil biti usmjeren ka prstenu, tako da je intezitet$|v_{max}|$.

g) Ukoliko promijenimo polaritet smjer brzine se ne mijenja, uvijek će biti usmjerena prema prstenu jerje smjer struje kroz projektil isti kao smjer struje kroz prsten.$(\mathbf{0.6\ b})$

h) Sada, za razliku od dijelova d) i f), struja kroz projektil nije zadana, već je rečeno da je projektil superprovodan pa važi:

$$E_i(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\pi r^2\frac{dB_z(t)}{dt} - L\frac{di(t)}{dt} = 0\ (\mathbf{0.7\ b})$$

odakle je $Ldi = -\pi r^2 dB_z$, pa je:

$$i(t) = -\frac{\pi r^2}{L}B_z(t).(\mathbf{0.3\ b})$$

Raketa

Od 1969. pa do 1972. godine na Mjesec je uspješno sletjelo ukupno 6 misija na kojim su bili uključeni ljudi. Prva i najpoznatija misija Apollo 11, je sletjela na Mjesec 20. jula 1969. godine, a zadnja Apollo 17, 11. decembra 1972. godine. U ovom zadatku ćemo razmotriti neke osnovne manevre pri kretanju u svemiru.

Da bi raketa napustila polje Zemljine teže, mora se generisati velika sila potiska za sticanje tzv. Druge kosmičke brzine koja se definiše kao minimalna brzina potrebna da neko tijelo napusti polje Zemljine teže.

a) (0.4 b) Izvedite izraz za Drugu kosmičku brzinu.

Mjesec se razlikuje u mnogim stvarima od Zemlje, a jedna od njih je gravitaciono ubrzanje koje igra veliku ulogu pri kretanju po površini Mjeseca.

b) (0.4 b) Odredite vektor gravitacionog ubrzanje na površini Mjeseca.

Razmotrimo sada raketu mase $M = 14 \cdot 10^3$ kg koja se kreće oko mjeseca po kružnoj putanji na visini $h = 150$ km. U tački A (slika 1), motor rakete se nakratko aktivira ispuštajući gasove brzine $u = 10^4$ m/s u odnosu na raketu u smjeru kretanja rakete, tako da raketa uspori što joj omogućava dolazak u tačku A.

c) (1.9 b) Kolika masa goriva se mora potrošiti pri aktiviranju motora u tački A, ako želimo da raketa dođe u tačku B?

d) (0.3 b) Nacrtajte putanju rakete od tačke A do tačke B.

e) (2.4 b) U drugom slučaju (slika 2) raketi se daje impuls u tački A koji je usmjeren prema centru Mjeseca da bi raketa došla do tačke C. Odredite masu potrošenog goriva u ovom slučaju.

Pretpostavimo da jedan dio motora rakete sagorjevaju gorivo prema procesu čiji je $p - V$ dijagram dat na slici 3. Luk na slici je polovina kružnice, a korišteno gorivo jednoatomski idealni gas. Veličine na slici smatrajte poznatima.

f) (1.2 b) Odredite promjenu količine toplote procesa.

Sada posmatrajmo relativističku raketu, sopstvene dužina l_0, koja se kreće brzinom $v_1 = c/2$ u odnosu na nepokretni referentnom sistem po jednoj osi.

Koordinate (x, y, z, t) u nepokretnom referentnom sistemu i koordinate (x', y', z', t') u referentnom sistemu koji se kreće brzinom v po $x-$ osi povezane su relacijama (Lorentzove transformacije):

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}},\ y' = y, z' = z,\ t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

g) (1.0 b) Pokažite da je dužina rakete u nepokretnom referentnom sistemu $l_0\sqrt{1-(v_1/c)^2}$.

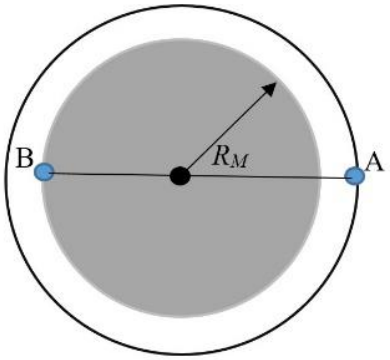
h) (2.4 b) Ukoliko sa zadnjeg kraja rakete bacimo loptu brzinom $v_2 = c/3$ u odnosu na raketu u pravcu i smjeru kretanja rakete, odredite koliko rastojanje pređe lopta prije nego što udari u prednji kraj rakete i koliko traje njen let u sistemu vezanom za:

- raketu;
- nepokretni referentni sistem;
- loptu (sopstveni sistem referencije lopte).

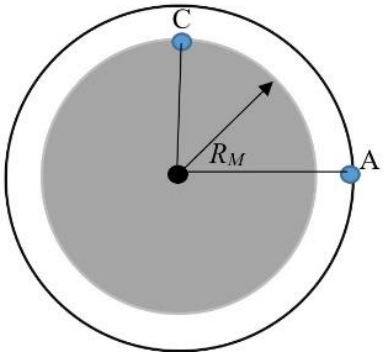
Zanemarite bilo kakve gubitke i pretpostavite da je masa goriva koja sagori puno manja od mase rakete.

Vrijednosti konstanti:

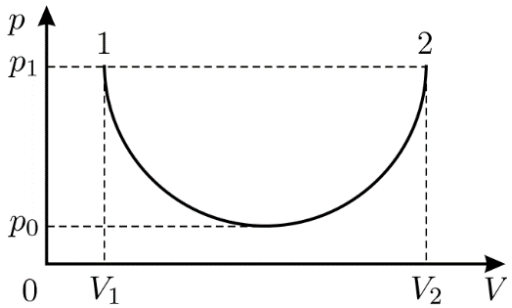
- Masa Mjeseca: $M_M = 7.35 \cdot 10^{22}$ kg
- Radijus Mjeseca: $R_M = 1.7 \cdot 10^3$ km
- Gravitaciona konstanta: $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.



Slika 1: Pozicije rakete u tačkama A i B



Slika 2: Pozicije rakete u tačkama A i C



Slika 3: $p - V$ dijagram sagorijevanja goriva

Rješenje:

a) Pri određivanju Druge kosmičke brzine koristit ćemo zakon o održanju energije pod pretpostavkom da kada tijelo napusti polje Zemljine teže na njega ne djeluje nikakva druga sila. Prema tome, imamo:

$$-G\frac{mM_z}{R_z}+\frac{mv^2}{2}=0\ (\mathbf{0.3\ b})$$

(na površini Zemlje imamo gravitacionu potencijalnu energiju tijela i njegovu kinetičku energiju, a pri izlasku iz Zemljinog polja smatramo da nema međudjelovanja sa drugim tijela). Imamo da je Druga kosmička brzina jednaka:

$$v=\sqrt{\frac{2GM_z}{R_z}}\ (\mathbf{0.1\ b}).$$

b) Imamo da je na površini Mjeseca u stanju ravnoteže:

$$m\overrightarrow{g_M}=-G\frac{mM_M}{R_M^2}\overrightarrow{r_0}\ (\mathbf{0.3\ b})$$

$$\overrightarrow{g_M}=-G\frac{M_M}{R_M^2}\overrightarrow{r_0},$$

gdje je $\overrightarrow{r_0}$ jedinični vektor usmjeren radijalno od centra Mjeseca ka površini. Nakon uvrštavanja dobivamo $\overrightarrow{g_M}=(-1.696)\ \overrightarrow{r_0}$ m/s^2 $(\mathbf{0.1\ b})$.

c) Prilikom kretanja rakete po kružnoj putanji oko Mjeseca imamo da centrifugalna sila je izjednačena sa gravitacionom:

$$G\frac{MM_M}{(R_M+h)^2}=\frac{Mv_0^2}{R_M+h}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_M}{R_M + h}}\ (\mathbf{0.3\ b}),$$

gdje je v_0 brzina rakete na posmatranj orbiti.

Ako označimo sa v_A i v_B brzine u tačkama A i B respektivno onda na osnovu ZOE možemo napisati jednačinu:

$$-G\frac{MM_M}{R_M + h} + \frac{Mv_A^2}{2} = -G\frac{MM_M}{R_M} + \frac{Mv_B^2}{2}$$

Ovdje je bitno napraviti razliku između brzina v_0 i v_A, a ona se ogleda u tome da je motor morao usporiti raketu sa brzine v_0 na brzinu v_A kako bi ona sletjela u tački B. ($\mathbf{0.4\ b}$)

Također na osnovu zakona o održanju momenta impulsa možemo pisati sljedeću jednačinu znajući da su vektori brzina u tačkama A i B okomiti na vektore položaja rakete posmatrajući iz centra Mjeseca:

$$Mv_A(R_M + h) = Mv_B R_M\ (\mathbf{0.4\ b}).$$

Kombinirajući jednačine dobivamo da je brzina u tački A nakon sređivanja:

$$v_A = \sqrt{\frac{2GM_M R_M}{(R_M + h)(2R_M + h)}}\ (\mathbf{0.1\ b})$$

ili napisano preko brzine v_0:

$$v_A = v_0\sqrt{\frac{2R_M}{(2R_M + h)}}$$

Sada imamo da je promjena brzine rakete nakon korištenja motora jednaka:

$$\Delta v_1 = v_0 - v_A = v_0\left(1 - \sqrt{\frac{2R_M}{(2R_M + h)}}\right) = 35.2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ (\mathbf{0.1\ b})$$

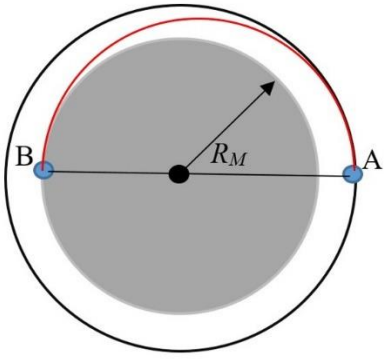
Iz zakona o održanju impulsa imamo da je promjena impulsa rakete jednaka promjeni impulsa goriva:

$$(M - \Delta m_g)\Delta v_1 = \Delta m_g u\ (\mathbf{0.5\ b})$$

Odavde slijedi da je masa goriva koja se sagori jednaka:

$$\Delta m_g = \frac{\Delta v_1}{\Delta v_1 + u}M = 49.2\ \mathrm{kg}\ (\mathbf{0.1\ b}).$$

d) Putanja rakete će biti elipsa prikazana kao na slici.



(0.3 b)

e) Pošto motor daje brzinu raketi prema centru Mjeseca, a brzina kruženja rakete je tangencijalna na kružnicu po kojoj se kreće onda će nova brzina rakete nakon slaganja ova dva vektora biti:

$$\overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{\Delta v_2}$$

a njen intenzitet je dat kao:

$$|\overrightarrow{v_A}| = v_A = \sqrt{v_0^2 + (\Delta v_2)^2}\ (\mathbf{0.6\ b})$$

Kao i u prethodnom dijelu imamo iz zakona o održanju energije:

$$-G\frac{MM_M}{R_M+h}+\frac{Mv_A^2}{2}=-G\frac{MM_M}{R_M}+\frac{Mv_C^2}{2}\ (\mathbf{0.4\ b})$$

i iz zakona o održanju momenta impulsa imamo da je:

$$\left|\vec{L}\right|=M|\vec{r}\times\overrightarrow{v_A}|=M\left|\vec{r}\times(\overrightarrow{v_0}+\overrightarrow{\Delta v_2})\right|=M\left|(\vec{r}\times\overrightarrow{v_0}+\vec{r}\times\overrightarrow{\Delta v_2})\right|=Mv_0(R_M+h)$$

gdje je: $|\vec{r}|=R_M+h$, a $\overrightarrow{v_0}\parallel\vec{r}$ i $\overrightarrow{\Delta v_2}\perp\vec{r}$. Sad imamo da je:

$$Mv_0(R_M+h)=Mv_CR_M\ (\mathbf{0.6\ b}).$$

Nakon kraćeg sređivanja imamo da je brzina koju je motor saopštio raketi jednaka:

$$\Delta v_2=v_0\frac{h}{R_M}=145.6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ (\mathbf{0.2\ b}).$$

Masu potrošenog goriva računamo iz zakona o održanju impulsa (kao u prethodnom dijelu):

$$\Delta m_g=\frac{\Delta v_2}{\Delta v_2+u}M=200.9\ \mathrm{kg}\ (\mathbf{0.6\ b}).$$

f) Promjena količine toplote se definiše kao:

$$\Delta Q=\Delta U+\Delta A\ (\mathbf{0.1\ b}).$$

$$\Delta U=\frac{3}{2}nR\Delta T=\frac{3}{2}\Delta(pV)=\frac{3}{2}p_1(V_2-V_1)\ (\mathbf{0.4\ b})$$

$$\Delta A=p_1(V_2-V_1)-\frac{1}{2}\pi(p_1-p_0)\frac{(V_2-V_1)}{2}\ (\mathbf{0.6\ b})$$

tako da je:

$$\Delta Q=\frac{3}{2}p_1(V_2-V_1)+p_1(V_2-V_1)-\frac{1}{2}\pi(p_1-p_0)\frac{(V_2-V_1)}{2}$$

$$\Delta Q=\left(\left(\frac{5}{2}-\frac{\pi}{4}\right)p_1+\frac{\pi}{4}p_0\right)(V_2-V_1)\ (\mathbf{0.1\ b}).$$

g) Koristeći Lorenzovu transformaciju $x'=\gamma(x-v_1t)$, gdje je x' koordinata u pokretnom referentnom koji se kreće brzinom v_1 sistemu koja odgovara koordinati x u nepokretnom referentnom sistemu. Dužinu rakete mjerimo kao razliku koordinata prednjeg i zadnjeg kraja rakete, pretpostavljajući da se raketa kreće u pozitivnom smjeru $x-$ ose (bez gubitka opštosti), tako da imamo da je:

$$l_0=x_2'-x_1'=\gamma(x_2-v_1t_2)-\gamma(x_1-v_1t_1)\ (\mathbf{0.4\ b}).$$

Kako istovremeno bilježimo prednji i zadnji kraj rakete u nepokretnom referentnom sistemu, slijedi da je $t_1=t_2$, te da je $l=x_2-x_1$ $(\mathbf{0.5\ b})$.

Tako da možemo pisati da je $l_0=\gamma(x_2-v_1t_2-x_1+v_1t_1)=\gamma(x_2-x_1)=\gamma l$ odakle slijedi da je:

$$l=\frac{l_0}{\gamma}=l_0\sqrt{1-(v_1/c)^2}\ (\mathbf{0.1\ b}).$$

što je i trebalo pokazati.

h)

- U sistemu vezanom za raketu lopta pređe rastojanje $d_1=l_0$ $(\mathbf{0.2\ b})$ krećući se brzinom $v_2=c/3$ i za to joj je potrebo vrijeme $t_1=\frac{3l_0}{c}$ $(\mathbf{0.2\ b})$.
- U nepokretnom referentnom sistemu brzina lopte je jednaka $v=\frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}}=\frac{5}{7}c$ $(\mathbf{0.3\ b})$, dok je dužina rakete jednaka $l=l_0\sqrt{1-(v_1/c)^2}=\frac{l_0\sqrt{3}}{2}$ $(\mathbf{0.1\ b})$, tako da lopta pređe rastojanje $d_2=l+v_2t_2=vt_2$ $(\mathbf{0.6\ b})$ (v_2t_2 je put koji pređe raketa), odakle dobivamo da je $t_2=\frac{7\sqrt{3}l_0}{3c}$ $(\mathbf{0.1\ b})$ i $d_2=\frac{5\sqrt{3}}{3}l_0$ $(\mathbf{0.1\ b})$.

U sopstvenom referentnom sistemu, lopta miruje tako da je $d_3=0$ $(\mathbf{0.2\ b})$, ali joj se zadnji kraj rakete približava brzinom v_2, pri čemu je sada dužina rakete jednaka $l'=l_0\sqrt{1-(v_2/c)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}l_0$ $(\mathbf{0.5\ b})$, tako da je vrijeme u ovom slučaj

Konačne rang liste

KONAČNI REZULTATI GRUPE A

			Z 1	Z 2	Z 3	Z 4	Suma
1	Ismail Brkić	Behram-begova medresa	18	25	13	14	70
2	Džan Ibrahimović	Međunarodna srednja škola Tuzla	18	25	13	11	67
3	Lav-Balašev Samarski	Druga gimnazija Sarajevo	7	23	10	25	65
4	Fatih Žgalj	Prva bošnjačka gimnazija Sarajevo	6	25	8	25	64
5	Bakir Čorbo	Prva bošnjačka gimnazija Sarajevo	10	25	7	12	54
6	Lejla Dorić	Behram-begova medresa	2	25	7	12	46
7	Kemal Čengić	Druga gimnazija Sarajevo	5	18	7	14	44
8	Faris Dautović	MSŠ Travnik	4	24	6,5	9	43,5
9	Adnan Mušanović	MSŠ Travnik	3	23	5	12	43
10	Kanita Rakovac	Gimnazija Meša Selimović	12	22	2	4	40
11	Asija Boračić	Treća gimnazija Sarajevo	5	25	3	6	39
12	Mak Pehar	KŠC Sv. Franjo	3	25	4	7	39
13	Muhammed Ahmetović	Behram-begova medresa	4	22	7,5	5	38,5
14	Asim Kalčo	Prva gimnazija Zenica	3	25	5	5	38
15	Haris Imamović	Druga gimnazija Sarajevo	12	25	0,5	0	37,5
16	Jusuf Salić	MSŠ Gračanica	2	4	3	25	34
17	Ena-Esma Toromanović	Gimnazija Bihać	1	22	6	4	33
18	Ivan Martinović	Koledž ujedinjenog svijeta Mostar	9	16	6	0	31
19	Namik Hadžović	Druga gimnazija Sarajevo	6	5	3	14	28
20	Arman Alečković	Druga gimnazija Sarajevo	2	19	6	1	28
21	Adi Kadušić	Tehnička škola Zenica	3	19	1	5	28
22	Jasmina Begović	Richmond park ISSS	8	15	0	4	27
23	Edin Živojević	MSŠ Enver Pozderović	2	19	0	2	23
24	Ibrahim Tabaković	Gazi-Husref-begova medresa	4	9	6	4	23
25	Sara Osmanović	Koledž ujedinjenog svijeta Mostar	0	16	5,5	0	21,5
26	Alen Hadžić	MSŠ Omer Filipović	0	15	6,5	0	21,5
27	Sara Dautbegović	KŠC “Sv. Pavao” Zenica	2	10	4	4	20
28	Edis Jašarević	Richmond park ISSS	3	10	6	1	20
29	Armin Đidelija	Druga gimnazija Mostar	2	14	0	3	19
30	Laila Zildžić	Gimnazija dr Mustafa Kamarić	2	10	3	4	19
31	Muhamed	MSŠ Gračanica	5	7	2	4	18

	Duraković						
32	Amar Korić	Druga gimnazija Mostar	5	12	1	0	18
33	Hatidža Šabanović	MSŠ Travnik	1	11	6	0	18
34	Nikola Marijanović	Srednja škola Stolac	2	8	2,5	4	16,5
35	Danis Brdarić	Mješovita srednja škola Maglaj	0	9	2	5	16
36	Ehlimana Ćesić	Druga gimnazija Mostar	3	2	2	5	12
37	Marija Grgić	Gimnazija Muhsih Rizvić	3	0	1	6	10
38	Esma Dizdarević	Međunarodna srednja škola Zenica	2	6	0,5	0	8,5
39	Dalila Alihodžić	Gimnazija Velika Kladuša	2	4	2	0	8

U Zenici, 06.04.2019

Komisija: 1. Dino Habibović, supervizor

2. Nermedin Džeković

3. Dinno Koluh

4. Kerim Hrvat

KONAČNI REZULTATI GRUPE B

Mjesto	Ime i prezime	Škola	1	2	3	4	Suma
1	Enida Fatić	Behram-begova medresa Tuzla	22,5	19	14	25	80,5
2	Aldin Dželo	Tehnička škola Zenica	23	14	20	5	62
3	Anes Mujkanović	Elektrotehnička škola Tuzla	23	8	20	2	53
4	Dino Selimović	Behram-begova medresa Tuzla	21	8,5	14	6	49,5
5	Tarik Rahmanović	Druga gimnazija Sarajevo	25	19	5,5	0	49,5
6	Edwin Graca	Srednja elektrotehnička škola Sarajevo	21	5,5	20	1	47,5
7	Azra Alagić	Treća gimnazija Sarajevo	20,5	14	11	2	47,5
8	Faris Mušić	MSŠ Travnik	20,5	15,5	5	2	43
9	Amina Čobić	Treća gimnazija Sarajevo	9,5	10	4,5	11	35
10	Adin Memić	Srednja elektrotehnička škola Sarajevo	5	10	20	0	35
11	Kerim Letić	Srednja elektrotehnička škola Sarajevo	6,5	13,5	13	0	33
12	Faram Mesham Nafi	Gimnazija Bihać	18	5	9	0	32
13	Hanan Memić	Prva bošnjačka gimnazija Sarajevo	15	10	5	1	31
14	Meliha Mešinović	Gimnazija Visoko	13	1	9	6	29
15	Adnan Hodžić	STŠ Kemal Kapetanović Kakanj	3	7	14,5	4,5	29
16	Hajrudin Bajrić	Elektrotehnička škola Tuzla	9	7,5	9	1	26,5
17	Hamza Isić	Elektrotehnička škola Mostar	3	4	19	0	26
18	Lamija Ibrahimpašić	Gimnazija Bihać	10	3	12	1	26
19	Lejla Mutapčić	Prva gimnazija Zenica	10	11	2,5	1	24,5
20	Ema Selimović	Gimnazija Bihać	16,5	1	3,5	1	22
21	Asmir Sikira	Prva bošnjačka gimnazija Sarajevo	15	6	0	0,5	21,5
22	Lejla Vražalica	Gimnazija dr.Mustafa Kamarić Gračanica	10	1	1,5	7	19,5
23	Almedina Ždralić	Druga gimnazija Mostar	1,5	1	3	2	7,5
24	Meriha Rathović	STŠ Hasib Hadžović Goražde	5	1,5	0	0	6,5
25	Alem Muratović	STŠ Goražde	3	0	0	0	3
26	Ajla Hajruši	Gimnazija Mostar	3	0	0	0	3

U Zenici, 06.04.2019

Komisija: 1. Senad Isaković, supervizor

2. Kenan Selman

3. Tarik Čorbo

4. Amra Salčinović Fetić

KONAČNI REZULTATI GRUPE C

Plasman	Ime i prezime	Škola	1	2	3	4	Suma
1	Igor Zarić	Treća gimnazija Sarajevo	10	13	20	20	63
2	Tarik Britvarević	Behram-begova medresa Tuzla	5	20	15	20	60
3	Hamza Omerbašić	MSŠ Enver Pozderović Goražde	0	20	18	21	59
4	Melina Dlakić	Gimnazija Visoko	10	14	20	14	58
5	Salim Redžepi	ISS	7	20	18	12	57
6	Andrej Marković	Treća gimnazija Sarajevo	7	20	6	21	54
7	Martina Larma	Druga gimnazija Sarajevo	0	18	14	20	52
8	Amer Bešo	Richmond Park Sarajevo koledž	0	20	5	26	51
9	Hanka Mušinbegović	Gimnazija Visoko	0	14	16	13	43
10	Lamija Biogradlija	ISZ	0	13	4	17	34
11	Zerina Jašarspahić	Gimnazija Muhsin Rizvić Kakanj	0	16	6	9	31
12	Ševko Zubović	Gimnazija Meša Selimović Tuzla	5	14	2	7	28
13	Ema Tupo	MSŠ Bugojno	0	10	3	7	20
13	Edin Kohnić	Prva Gimnazija Zenica	5	6	3	6	20
15	Ela Vrana	STŠ Hasib Hadžović Goražde	0	9	3	7	19
16	Sabra Omeragić	MSŠ Enver Pozderović Goražde	0	5	9	4	18
17	Naila Sarvan	Medicinska škola Zenica	0	4	5	8	17
18	Dženita Gadara	Druga gimnazija Mostar	0	6	6	1	13
18	Lamija Terzić	MSŠ Bugojno	0	1	1	11	13
18	Emina Mujkić	MSŠ Doboj-Istok	0	5	2	6	13
21	Petra Bošković	SŠ Stolac	0	1	2	3	6

U Zenici, 06.04.2019

Komisija: 1. Mirsad Tunja, supervizor

2. Naida Dedić

3. Emir Baručija

4. Kenan Saračević

KONAČNI REZULTATI GRUPE D

BR.	IME I PREZIME	Z1: Raketa	Z2:Gauss rifle	Z3:Ah, ti čudesni fotoni!	SUMA
1	**Muhamed Sokolović**	**8,5**	**6,1**	**1,75**	**16,35**
2	**Alen Mrdović**	**8,1**	**2,2**	**2,5**	**12,8**
3	**Nola Šegalo**	**7**	**3,8**	**1**	**11,8**
4	**Sara-Medina Šehović**	**6**	**2,5**	**3**	**11,5**
5	**Fahrudin Delić**	**4,3**	**2,9**	**3,75**	**10,95**
6	**Nedim Balihodžić**	**3,6**	**3**	**3,75**	**10,35**
7	**Dženana Gazibegović**	**5,75**	**0,95**	**2,5**	**9,2**
8	**Vedad Grbo**	**6,05**	**1,2**	**1,25**	**8,5**
9	**Mirza Mešić**	**2,6**	**1,7**	**3,75**	**8,05**
10	**Abdullah Dizdarević**	**3,5**	**1,2**	**3,25**	**7,95**
11	**Enesa Hrustić**	**3,4**	**0,7**	**2**	**6,1**
12	**Amar Hadžić**	**2,6**	**3,2**	**0,25**	**6,05**
13	**Abdul-Vehab Đozić**	**2,7**	**1**	**0,75**	**4,45**
14	**Dino Škrgić**	**1,8**	**0,1**	**2,5**	**4,4**
15	**Rajza Selimović**	**2,3**	**0,2**	**1,5**	**4**
16	**Hana Muslić**	**2,2**	**0,2**	**1**	**3,4**
17	**Ademir Sejdinović**	**1,9**	**0**	**1,25**	**3,15**
18	**Adnan Fazlagić**	**2,1**	**0**	**0,25**	**2,35**
19	**Almedina Omanović**	**1,3**	**0**	**0,75**	**2,05**
20	**Samra Benić**	**0**	**0**	**0,25**	**0,25**

U Zenici, 06.04.2019

Komisija: 1. Dženan Devedžić, supervizor

2. Benjamin Fetić