UNIVERZITET U TUZLI
Prirodno-matematički fakultet
Odsjek: Fizika

Amra Bajrić

ZAVRŠNI RAD

Prvog ciklusa studija

Teorija struna i dodatne dimenzije

Tuzla, juni 2020.

Mentor: dr. sc. Hedim Osmanović, vanredni profesor

Broj stranica: 40

Redni broj završnog rada:

ABSTRACT

The purpose of this thesis is to study string theory which is developed in response to unsolved problems in physics, primarily the problem of quantization of the theory of gravity. This theory attempts to unify the Standard Model and gravity.

The thesis begins with informations on the origin of string theory and some of the basic concepts related to the theory, then it describes open and closed strings and their quantization through the principle of the light cone quantization. Through the equations of string motion and the mass equations of such a string state, it is shown that the theory contains tachyon which can only be removed by supersymmetry. Due to the resulting excitations on the strings, the states that appear in the spectrum of the closed string are determined. The significance of the theory is reflected precisely in the massless state of the closed string spectrum, because graviton is found in the relation as a massless particle of spin 2.However, the appearance of tachyons is a strange result, so it is necessary to reduce the theory from 26 dimensions to 11 dimensions. Furthermore, this paper describes extra dimensions which are not visible in low energy physics.The theory attempts to build models of a multidimensional universe and studies dimensions as membranes of space which are also called branes.With the compactification of dimensions, new theories on inflation and the origin of the universe appear, which have a connection with the string theory and consider the appearance of inflaton, scalar fields and p brane.

The Big Bang is thought to be associated with the annihilation of branes and anti-branes in early space, and the cosmic inflation model itself predicts certain consequences such as quantum oscillations and cosmic strings. Despite the fact that there is no experimental confirmation, string theory seems to be an exceptional candidate for a unified theory of everything.

Keywords: strings, quantization, graviton, extra dimensions

SAŽETAK

Cilj ovog rada je proučavanje teorije struna koja je razvijena kao odgovor na neriješene probleme u fizici, prvenstveno problem kvantizacije teorije gravitacije. Ova teorija pokušava ujediniti Standardni model i gravitaciju.

Rad počinje sa informacijama o nastanku teorije struna i sa nekim od osnovnih pojmova vezanih za teoriju, zatim opisuje otvorene i zatvorene strune i njihovu kvantizaciju kroz princip kvantizacije svjetlosnog konusa. Kroz relacije kretanja strune i relacije mase stanja strune pokazuje se da teorija sadrži tahion kojeg može ukloniti samo supersimetrija. Zbog nastalih pobuđenja na strunama, određuju se stanja koja se pojavljuju u spektru zatvorene strune. Značaj teorije se ogleda upravo u bezmasenom stanju spektra zatvorene strune jer se u relaciji pronalazi graviton kao bezmasena čestica spina 2. Međutim, pojava tahiona predstavlja čudan rezultat, pa je potrebno da se teorija sa 26 dimenzija smanji na njih 11. Zbog toga, ovaj rad dalje opisuje dodatne dimenzije koje nisu vidljive u fizici niskih energija. Teorija pokušava izgraditi modele višedimenzionalnog svemira i proučava dimenzije kao membrane prostora koje se nazivaju brane. Kompaktifikacijom dimenzija javljaju se nove teorije o inflaciji i nastanku svemira koje imaju povezanost sa teorijom struna te razmatraju pojavu inflatona, skalarnih polja i p brane.

Smatra se da je Veliki prasak povezan sa anihilacijom brane i anti-brane u ranom svemiru te sam model kosmičke inflacije predviđa određene posljedice kao što su kvantne oscilacije i kosmičke strune. Uprkos tome što nema eksperimentalne potvrde, teorija struna se čini kao izuzetan kandidat za ujedinjenu teoriju svega.

Ključne riječi: strune, kvantizacija, graviton, dodatne dimenzije

SADRŽAJ

1 UVOD

Godine 1919. njemački matematičar po imenu Theodor Kaluza iznio je vrlo odvažnu ideju. Rekao je da bi naš svemir mogao imati više od tri dimenzije koje poznajemo te je predložio da bi mogle postojati dodatne prostorne dimenzije koje iz nekog razloga ne vidimo. On je proširio Einsteinovu opštu teoriju relativnosti na petodimenzionalno prostor-vrijeme, gdje bi petu dimenziju predstavljao foton. Oscar Klein je 1926. godine predložio da se četvrta prostorna dimenzija uvije u krug vrlo malog prečnika . Na taj bi se način čestica koja se kratko vrijeme kretala duž ove osi vratila u početni položaj. Udaljenost koju čestica može preći prije nego što dosegne svoj početni položaj predstavlja veličinu dimenzije. Einstein je već iskoristio prostor i vrijeme da opiše gravitaciju. Kaluza je pretpostavio da mu je potrebna dodatna dimenzija ako želi opisati još jednu silu. Zamislio je da svijet ima četiri prostorne dimenzije i da je elektromagnetizam zakrivljenost u toj četvrtoj dimenziji. Kad je napisao formulu koja opisuje zakrivljenost u svemiru sa četiri prostorne dimenzije, dobio je formule za gravitaciju koje je Einstein već izveo u tri dimenzije, ali je dobio i još jednu formulu zbog dodatne dimenzije. Ta dodatna formula nije bila ništa drugo nego već poznata formula koja opisuje elektromagnetnu silu. Kaluza-Klein teorija je fizička teorija koja pokušava ujediniti elektromagnetizam sa Einsteinovim opisom gravitacije. Od 1920-ih taj je napor proizveo sve veći broj pristupa razumijevanju kvantne gravitacije. Najistaknutija u ovom trenutku je teorija struna - ili, preciznije, sve veća skupina teorija struna. Izvorno izveden iz studija jake nuklearne sile, koncept teorije tvrdi da su osnovne jedinice materije upravo sitne rastegnute niti nazvane "strune", a ne tačkaste čestice. Strune dužine oko 10^{-32} cm vibriraju različitim frekvencijama, a svakoj frekvenciji pripada neka čestica u prirodi.

Jedna od najupečatljivijih kvalitativnih karakteristika teorija struna je to što predviđaju postojanje dodatnih prostornih dimenzija, izvan poznate tri dimenzije prostora plus vrijeme, što sugerira nove pristupe za objašnjavanje nekih neriješenih zagonetki u Standardnom modelu fizike čestica. Kvantna teorija polja implicira broj dimenzija prostor-vremena: za bozonsku teoriju, odnosno teoriju bez spina, zahtjevamo 26 dimenzija a za supersimetričnu teoriju, tj. teoriju u kojoj postoji simetrija između cjelobrojnog i polovičnog spina, broj dimenzija mora biti 10. Osim toga, razni tipovi teorije struna, zapravo su različiti granični slučajevi jedne šire sveobuhvatne teorije, tzv.

M-teorije, koja još nije posve poznata, ali zna se da mora biti formulirana u najmanje 11 dimenzija. Čini se da prostor u kojem živimo ima daleko više dimenzija nego što to osjećamo u svakodnevnom životu.

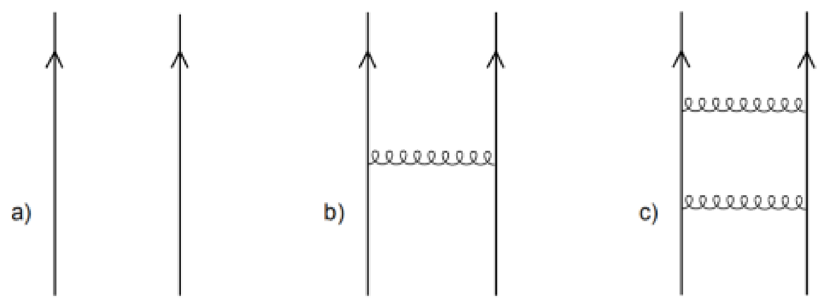
Ova tema se nastavlja sa eksperimentalno dokazanim razumijevanjem četiri temeljne sile prirode do teorijskih napora da se razvije „teorija svega“ koja spaja sve četiri sile. Predstavljen sredinom 1970-ih, koncept struna potaknuo je veliko teorijsko uzbuđenje iako do sada nema eksperimentalne potvrde. Ova ideja uvodi teoriju struna u kontekst kvantne gravitacije i prikazuje svojstvenu višedimenzionalnu prirodu, a najperspektivniji pristup uključuje ukupno deset dimenzija. Ovaj rad zatim opisuje odnos teorije struna i fizike čestica te uvodi ideju "brane", povezanih sa strunama.

Teorija struna također ima potencijal pružiti uvid u određene zagonetke kozmologije, kao što su priroda Velikog praska i porijeklo tamne materije i tamne energije. Međutim, za sada nema dokaza da je teorija struna ispravna modifikacija Einsteinove teorije, što bi je učinilo kompaktibilnom s kvantnom mehanikom u našem svijetu. Teorije struna, ili barem većina modela koji slijede iz teorije struna, samo su prediktivni na energetskim razmjerama daleko od onoga što se može ispitati trenutnom fizikom čestica i kosmološkim opažanjima. Ovo nije iznenađujuće, proizlazi iz osnovne analize dimenzija koja sugerira da će nam trebati puno sreće (ili veoma veliki akcelerator) da bismo direktno testirali bilo koji pristup kvantnoj gravitaciji. Međutim, teorija struna se vrlo dobro uklapa u postojeću sliku o tome kako fizika može izgledati izvan standardnog modela. Osim gravitacije, teorija struna nužno uključuje i niz ideja o ujedinjenju : grandiozno ujedinjenje, teorija Kaluza-Klein (ujedinjenje preko dodatnih dimenzija), supersimetriju i produženu supersimetriju. Pored toga, spaja ove ideje na elegantan način i rješava neke od ranije nastalih problema - od kojih su najistaknutije poteškoće u dobivanju gauge interakcija i problem renormalizacije iz Kaluza-Klein-ove teorije, koji je još složeniji u odnosu na četverodimenzionalnu gravitaciju. Nadalje, neke od najjednostavnijih teorija struna dovode do nastanka upravo gauge grupa i reprezentacija koje su ranije nastajale u ujedinjenju. Konačno, cijeli predmet ima jedinstvo i strukturu daleko ljepšu od svega što smo vidjeli ili očekivali da ćemo vidjeti u teoriji kvantnog polja. Iako još ne znamo je li ispravna ili ne, ova ideja imala je veliki uticaj na fizičare u prošlom stoljeću i još uvijek inspiriše mnoga najnaprednija istraživanja.

2 TEORIJA STRUNA

2.1 Zašto strune?

Glavni trag koji nas vodi do teorije struna je problem kvantne gravitacije na kratkim udaljenostima. Krajnji rezultat kvantne revolucije bila je spoznaja da u kvantnom svijetu (za razliku od klasičnog svijeta u kojem pojedine čestice slijede određene klasične putanje) položaji, momenti i druga svojstva čestica kontrolisani su od strane valne funkcije koja daje vjerovatnoće za različita klasična ponašanja koja se pojavljuju. Naredna slika prikazuje dvije čestice koje se kreću, te korekcije usljed razmjene jednog gravitona i razmjene dva gravitona.



Slika 1. a) Dvije čestice se kreću slobodno b) Korekcija usljed razmjene jednog gravitona c) Korekcija usljed razmjene dva gravitona

Razmjena jednog gravitona je proporcionalna Newton-ovoj konstanti G_N koja sa $\hbar = c = 1$ ima jedinicu dužine^2 ili mase^{-2} : $G_N = M_P^{-2}$ gdje je Planckova masa $M_P = 1,2 \times 10^{19}$ GeV. Omjer bezdimenzionalne korekcije gravitona prema izvornoj amplitudi tada mora biti reda E^2/M_P^2, gdje je E vrijednost karakteristične energije procesa. Ovo je, dakle, irelevantna veza, koja slabi na velikoj udaljenosti, a posebno je zanemariva pri energiji čestica od nekoliko stotina GeV. Na isti način, veza jača pri visokoj energiji i pri $E > M_P$ teorija perturbacija (smetnji) više nije primjenjiva. To je poznato kao nerenormalizacija teorije.

Korekcija dva-gravitona (slika 1. pod c) je data kao:

$$M_P^{-4} \int^{\infty} dE' E'^3$$

gdje je E' energija virtualnog intermedijarnog stanja i divergira ako postoji teorija ekstrapolirana na proizvoljno visoke energije. Postoje dvije glavne mogućnosti. Prva je da teorija ima netrivijalnu ultraljubičastu fiksnu tačku i da je pri visokoj energiji. Drugi je da postoji nova fizika na određenoj energiji i ekstrapolacija teorije niskih energija izvan ove tačke nije valjana. Teško je utvrditi postojanje netrivijalne fiksne tačke. Zapravo znamo samo jedan način za širenje gravitacione interakcije i prekid divergencija bez narušavanja konzistentnosti teorije. To je ***teorija struna***, u kojoj su graviton i sve ostale elementarne čestice jednodimenzionalni objekti, strune, a ne tačkasti objekti kao u teoriji kvantnog polja. Iskustvo je pokazalo da različite probleme teorije kvantnog polja nije lako riješiti, tako da ako imamo čak i jedno rješenje trebamo ga ozbiljno shvatiti.

Gotovo slučajno sredinom 1970-ih, teoretičari su shvatili da bi mogli dobiti teoriju kvantne gravitacije postulirajući da temeljne slagalice prirode nisu tačkaste čestice, već strune - geometrijski predmeti koji predstavljaju bitno drugačiji način razmišljanja o materiji. Skupina teorija izrasla je iz fizike jakih interakcija. U tim teorijama dva kvarka koja međusobno snažno djeluju povezana su strujom nosilaca jake sile, koja proizvodi *"cijev fluksa"*. Potencijalna energija između dva kvarka raste linearno sa rastojanjem između kvarkova.

Odaberimo konstantu proporcionalnosti koja pretvara udaljenost između jako interaktivnih čestica u količinu sa jedinicama energije i nazovimo je "T_{string}", jer ima dimenzije mase po jedinici dužine, odnosno predstavlja napetost strune. U stvari, objekt koji nastaje pomoću cijevi fluksa kreirane od nosilaca jake sile koji se izmjenjuju između dva kvarka može se smatrati *strunom*. Jedna od misterija jakih interakcija je da se osnovni naelektrisani objekti - kvarkovi - nikada ne vide u izoliranom stanju.

Slika 2. prikazuje nastanak strune i objašnjava ovo ograničenje: Ako pokušate razdvojiti kvarkove dalje i dalje, rastuća energija cijevi fluksa na kraju pogoduje stvaranju drugog para kvark-antikvark u sredini postojećeg para kvarka; struna se lomi i zamjenjuje sa dvije nove cijevi fluksa koje povezuju dva nova para kvarkova. Iz tog razloga opisi struna i jakih interakcija postali su popularni krajem 1960-ih, te se kvantna hromodinamika (QCD) pojavila kao cjelovitiji opis jake sile.

Slika 2. Prilikom razdvajanja dva kvarka pojavljuju se novi kvarkovi

Međutim, fizičari su otkrili neke fascinantne aspekte teorija dobivenih obrađujući strune ne kao djelotvorne cijevi fluksa, već kao temeljne kvantne objekte koji imaju svoja svojstva.

Možda najupečatljivije opažanje bila je činjenica da će svaka teorija u kojoj su osnovni objekti strune neizbježno sadržavati česticu sa svim pravim svojstvima koja će služiti kao *graviton*, osnovni nosilac gravitacione sile. Iako je ovo neželjena smetnja u pokušaju da se opiše fizika jakih interakcija, uvjerljiv je nagovještaj da se teorije kvantnih struna mogu povezati s kvantnom gravitacijom.

1984. godine Michael Green iz Queen Mary-ja, Londonskog univerziteta i John Schwarz sa Kalifornijskog instituta za tehnologiju otkrili su prve potpuno konzistentne teorije kvantnih struna te su obje bile bez katastrofalnih nestabilnosti vakuuma i načelno sposobne ugraditi poznate temeljne sile. Ove teorije automatski proizvode kvantnu gravitaciju i nosioce sile za interakcije koje su kvalitativno (a u nekim posebnim slučajevima čak i kvantitativno) slične silama poput elektromagnetizma i jakim i slabim nuklearnim silama. Međutim, ova je linija istraživanja imala jednu neočekivanu posljedicu: ove teorije su najprirodnije formulirane u 10-dimenzionalnom prostor-vremenu. Vratit ćemo se izazovima i mogućnostima koje nudi teorija dodatnih dimenzija u narednim poglavljima.

2.2 Osnove u teoriji struna

Uvođenje produženog objekta (strune) čija se temeljna dužina skale ne razlikuje toliko od Planckove dužine, $l_{string} \approx 10^{-32}$ centimetara, može riješiti osnovni problem u kvantnoj gravitaciji. Suština je da u visokoenergetskim procesima raspršivanja veličina strune raste sa njenom energijom.

Želimo opisati dinamiku jednodimenzionalnih objekata. Prvo što trebamo je radnja, a najjednostavnija koja se koristi je Nambu-Goto relacija:

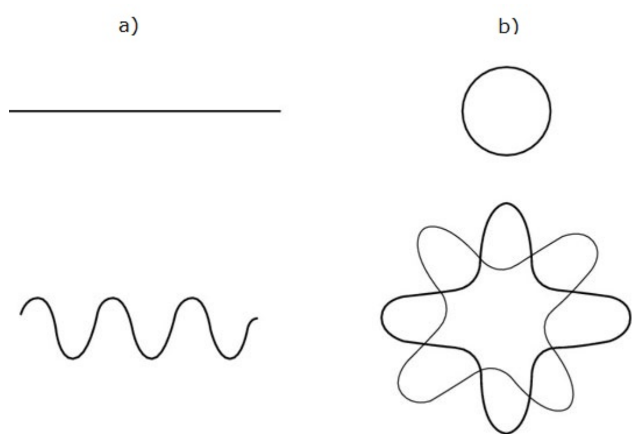
$$S = \frac{-1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-det\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu}.$$

Nambu – Goto[1] relacija je najjednostavnija invarijantna relacija u teoriji bozonskih struna, a koristi se i u drugim teorijama koje istražuju objekte slične strunama (na primjer, kosmičke strune). Predstavlja analizu ponašanja strune (beskonačno tanke) nulte debljine, te se gradi koristeći principe Lagrangian mehanike. Baš kao što je djelovanje za slobodnu tačkastu česticu proporcionalno njenom odgovarajućem vremenskom intervalu - tj. "dužini" njene linijske putanje - tako je i relativistička relacija struna proporcionalna području ***dvodimenzionalne plohe (worldsheet)*** koju struna obrazuje u vremenu dok putuje kroz prostor-vrijeme. Oznaka za worldsheet je $\sum$, a integral u relacijama se odnosi na površinu tog područja, odnosno worldsheet-a. Dakle, putanja sada više nije jednodimenzionalna linija kao što je to bio slučaj za relativističku česticu, nego dvodimenzionalna ploha, tj. worldsheet. Prethodna relacija se odnosi na relativističku tačkastu česticu. Za statičku strunu, ova se relacija svodi na minus dužina strune (l_{string}) puta vremenski interval $1/2\pi\alpha'$, te ostatak predstavlja napetost strune. Iako worldsheet opisujemo pomoću $X^\mu(\sigma 1, \sigma 2)$ dvoparametarskih funkcija koje opisuju položaj strune, koristeći parametrizaciju $\sigma^a = \sigma, \tau$ worldsheet-a, radnja je neovisna o odabiru parametrizacija (invarijantna koordinata worldsheet-a je $\sigma 1$ koja predstavlja položaj na struni i poprima vrijednosti od 0 do l_{string}, a vremenska koordinata je $\sigma 2$, za koju se koristi i oznaka τ). α' predstavlja konstantu, tzv. Regge–ov nagib, povezana je sa kvadratom dužine strune i proizilazi iz relacije za napetost strune (T):

$$T_{string} = \frac{1}{2\pi\alpha'}$$

[1] Ime je dobila po japanskim fizičarima Yoichiro Nambu i Tetsuo Goto.

Klasična statistička mehanika *membrana* data je zbirom preko dvodimenzionalnih površina i usko je povezana s kvantnim mehaničkim integralom putanje struna. U svim tim slučajevima vodeći termin u relaciji je napetost. Ali sve su to složeni predmeti, sa određenom debljinom, pa će zbog toga postojati pojmovi viših dimenzija. U ovom slučaju, strune od kojih potiče gravitacija su ***osnovne*** i predstavljaju tačno jednodimenzionalne objekte nulte debljine. ***Složene strune*** imaju veći broj interakcija kada se presijecaju; osnovne strune nemaju i one su na taj način jednostavnije od različitih složenih struna, posebno jednostavnije od hipotetičke teorije struna u QCD (quantum chromodynamics - kvantna hromodinamika). Uprkos tome, bilo je mnogo povezivanja između teorije osnovnih i složenih struna. Krajevi strune mogu biti spojeni pa govorimo o ***zatvorenoj struni***, ili neovisni jedan o drugome - u tom slučaju radi se o ***otvorenoj struni***, što je prikazano na sljedećoj slici.



Slika 3. a) Otvorene strune b) Zatvorene strune

Korisno je napisati relaciju S u obliku koji uklanja kvadratni korijen derivacije. Dodavajući induciranu metriku worldsheet-a slijedi:

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu$$

gdje je $g = det g_{ab}$, a g_{ab} je metrički tenzor worldsheet-a. Ovo je poznato kao Polyakov postupak[2], jer naglašava određene veličine za kvantizaciju.

[2]Ovaj postupak su izveli Stanley Deser i Bruno Zumino, a povezao se sa Aleksandrom Polyakovom nakon što ga je iskoristio u kvantizaciji struna.

U fizici, Polyakov postupak je relacija dvodimenzionalne teorije konformalnog polja koja opisuje dvodimenzionalnu plohu (worldsheet) u teoriji struna. Jednačina kretanja metrike određuje normalizaciju ovisnu o položaju:

$$g_{ab} \simeq \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu.$$

Polyakov postupak ima smisla bilo za Lorentzovu metriku, oznaka (- , +) ili za euklidsku metriku, oznaka (+, +). Veliki dio izvođenja može se provesti u bilo kojem slučaju. Vjerojatno su povezani sa rotacijama konture u integraciji preko metrika, budući da "light-cone" kvantizacija (Lorentzian) daje istu teoriju kao Euklid-Polyakova kvantizacija. Odnos između integrala puta iznad Lorentzove i Euklidove metrike složen je i zbunjujući problem u četverodimenzionalnoj gravitaciji. Čini se da djeluje jednostavno u dvije dimenzije - možda zbog toga što ima dovoljno gauge simetrija za potpuno uklanjanje metrike. Pored dvodimenzionalne koordinatne invarijantnosti,

$$X'(\sigma') = X(\sigma)$$

$$\frac{\partial \sigma'^a}{\partial \sigma^c} \frac{\partial \sigma'^b}{\partial \sigma^d} g'_{ab}(\sigma') = g_{cd}(\sigma),$$

Polyakov postupak ima još jednu lokalnu simetriju, Weyl-ovu invarijantnost, koja podrazumijeva predstavljanje metrike u zavisnosti od položaja:

$$g'_{ab}(\sigma) = e^{2\omega(\sigma)} g_{ab}(\sigma).$$

Primjećujući da metrika ima tri komponente i da postoje tri lokalne simetrije, (dvije koordinate i skalu metrike) da bismo nastavili sa kvantizacijom, potrebno je ukloniti višak iz lokalnih simetrija. Prirodno je to učiniti pod određenim uvjetima u metrici, te uvodimo da je:

$$g_{ab}(\sigma) = \delta_{ab}.$$

Fiksiranje ravne metrike ne određuje u potpunosti lokalni koordinatni sistem. Znamo da ako su dva koordinatna sistema povezana:

$$\sigma'^1 + i\sigma'^2 = f(\sigma^1 + i\sigma^2),$$

za analitičku funkciju f, metrika se mijenja samo skaliranjem ovisno o položaju, tako da ga Weyl transformacija vraća u izvorni oblik. Drugim riječima, transformacija koordinata (prethodna relacija) u kombinaciji sa odgovarajućom Weyl-ovom transformacijom ostavlja metriku u ravnom gauge-u. Dvodimenzionalna ploha koja je worldsheet strune ujedno je i polje u kojem "živi" X_μ.

2.3 Otvorene strune

Da bi se opisala otvorena struna, koristi se koordinata prostora σ koja ide od 0 do π i vremenska koordinata τ. Međutim, sada se razmatraju koordinate svjetlosnog konusa (tzv. light - cone koordinate) :

$$\sigma^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma \pm \tau).$$

U principu sada imamo dvije mogućnosti: ili smatramo da su funkcije $X^\mu(\sigma,\tau)$ na ivicama fiksirane (Dirichletov granični uslov), tako da je i varijacija $\delta X^\mu(\sigma,\tau)$ ograničena na nulu, ili ove funkcije ostavljamo slobodnima (Neumannovi granični uslovi). Krajnja tačka koja se pridržava Dirichletovog graničnog uslova ne može se pomaknuti i mogla bi se vezati za beskonačno težak kvark za razliku od krajnje tačke koja se pridržava Neumannovih graničnih uslova i koja se može kretati slobodno, poput svjetlosnog kvarka. Za sada je to relevantniji slučaj. Ukoliko preko Polyakovog postupka izrazimo relaciju:

$$S = -\frac{1}{2}T\int d^2\sigma(\partial_a X^\mu)^2,$$

i napišemo proizvoljnu infinitezimalnu varijaciju $\delta X^\mu(\sigma,\tau)$, varijacija relacije će se pisati kao:

$$\delta S = T\int d\tau \int_0^\pi d\sigma(-\partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma \delta X^\mu + \partial_\tau X^\mu \partial_\tau \delta X^\mu).$$

Parcijalnom integracijom postaje:

$$\delta S = T\int d\tau \int_0^\pi d\sigma \delta X^\mu(\partial_\sigma^2 - \partial_\tau^2 X^\mu +$$

$$+T\int d\tau(\delta X^\mu(0,\tau)\partial_\sigma X^\mu(0,\tau) - \delta X^\mu(\pi,\tau)\partial_\sigma X^\mu(\pi,\tau)).$$

Kako ovo mora nestati za svaki $\delta X^\mu(\sigma,\tau)$, prvi dio relacije predstavlja jednačinu kretanja za $\delta X^\mu(\sigma,\tau)$, dok drugi dio govori da $\partial_\sigma X^\mu$ nestaje na ivicama $\sigma = 0$ i $\sigma = \pi$. Navedeno implicira da niti jedan moment ne može teći unutra ili izvan ivica, tako da na njih ne djeluje sila: ivice su slobodne krajnje tačke. Za otvorenu strunu rješenje možemo pisati na sljedeći način:

$$X^\mu(\sigma,\tau) = X_L^\mu(\sigma+\tau) + X_R^\mu(\tau-\sigma).$$

Na granicama $\sigma = 0$ i $\sigma = \pi$ granični uvjet je $\partial_\sigma X^\mu = 0$. Slijedi da je:

$$\partial_\tau X_L^\mu(\tau) - \partial_\tau X_R^\mu(\tau) = 0$$

$$\partial_\tau X_L^\mu(\tau + \pi) - \partial_\tau X_R^\mu(\tau - \pi) = 0.$$

Prva relacija od prethodne dvije podrazumijeva da X_L^μ i X_R^μ moraju biti jednaki kao konstante, ali ne mijenja se smisao ako je konstanta jednaka nuli:

$$X_L^\mu(\tau) = X_R^\mu(\tau).$$

U drugoj relaciji ne možemo ukloniti konstantu:

$$X_L^\mu(\tau + \pi) = X_R^\mu(\tau - \pi) + \pi u^\mu,$$

ovdje je u^μ konstantan 4-vektor. To podrazumijeva da, osim linearnog izraza, $X_L^\mu(\tau)$ mora biti periodičan:

$$X_L^\mu(\tau) = \frac{1}{2}X_0^\mu + \frac{1}{2}\tau u^\mu + \sum_n a_n^\mu e^{-in\tau},$$

tako da je kompletno rješenje:

$$X^\mu(\sigma, \tau) = X_0^\mu + \tau u^\mu + \sum_{n\neq 0} a_n^\mu e^{-in\tau} 2cos(n\sigma).$$

U Green, Schwarz i Witten notaciji[3], korištene su koordinate: $\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$ i faktor konverzije : $l = \sqrt{2\alpha'} = 1/\sqrt{\pi T}$, te je, na osnovu ove notacije:

$$X_R^\mu(\tau) = X_L^\mu(\tau) = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}l^2 p^\mu \tau + \frac{i}{2} l \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} a_n^\mu e^{-in\tau}$$

izraz koji opisuje položaj otvorene strune dat kao:

$$X^\mu(\sigma, \tau) = x^\mu + l^2 p^\mu \tau + il \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} a_n^\mu e^{-in\tau} cos(n\sigma).$$

[3]Fizičari Michael Green, John Schwarz i Edward Witten napisali su dva dijela knjige o teoriji struna i uveli vlastitu notaciju za kvantizaciju otvorene strune. Knjiga je objavljena 1987. godine i temeljno izlaganje teorije predstavljeno u toj knjizi danas je jednako relevantno kao i kad je prvi put objavljeno. Svezak 2 odnosi se na amplitude s jednom petljom, proučavanje anomalija, niskoenergetsku teorijsku analizu anomalija, pojavu gauge grupa i četverodimenzionalnu fiziku koja nastaje sabijanjem šest dodatnih dimenzija.

2.4 Zatvorene strune

U slučaju zatvorene strune izaberemo granični uslov:

$$X^\mu(\sigma,\tau) = X^\mu(\sigma+\pi,\tau).$$

Ponovo se koristi transformacija $\sigma^+ \to f^+(\sigma^+)$ da bismo garantovali da će se ovo stanje zadržati nakon gauge fiksiranja. Pod pretpostavkom da je worldsheet strune vremenski ovisan, pitanje je mogu li se nametnuti granični uslovi bilo kojoj zatvorenoj struni, zadržavajući koordinatni uslov, ili koristeći transformacije koordinata oblika:

$$\sigma^+ \to \tilde{\sigma}^+(\sigma^+)$$

$$\sigma^- \to \tilde{\sigma}^-(\sigma^-).$$

Zapravo, granični uslov zatvorene strune može se napisati kao:

$$X^\mu(\sigma,\tau) = X^\mu(\sigma+\pi,\tau) = X^\mu_L(\sigma+\tau)+X^\mu_R(\tau-\sigma) = X^\mu_L(\sigma+\pi+\tau)+X^\mu_R(\tau-\sigma-\pi)$$

Slijedi zaključak da funkcija:

$$X^\mu_R(\tau) - X^\mu_R(\tau-\pi) = X^\mu_L(\tau+\pi+2\sigma) - X^\mu_L(\tau+2\sigma) = Cu^\mu,$$

mora biti nezavisna od σ i τ. Ako se izabere koeficijent $C = 1/2\pi$, slijedi da su $X^\mu_R(\tau)$ i $X^\mu_L(\tau)$ periodični i mogu se pisati kao:

$$X^\mu_R(\tau) = \frac{1}{2}u^\mu\tau + \sum_n a^\mu_n e^{-2in\tau},$$

$$X^\mu_L(\tau) = \frac{1}{2}u^\mu\tau + \sum_n b^\mu_n e^{-2in\tau},$$

pa je:

$$X^\mu(\sigma,\tau) = X^\mu_0 + u^\mu\tau + \sum_{n\neq 0} e^{-2in\tau}(a^\mu_n e^{-2in\sigma} + b^\mu_n e^{2in\sigma})$$

gdje realni dio od X^μ zahtijeva :

$$(a^\mu_n)^* = a^\mu_{-n};\ (b^\mu_n)^* = b^\mu_{-n}$$

te se i ovdje vidi da konstantni 4-vektor u^μ opisuje ukupnu brzinu (u odnosu na koordinatu τ) i X_0^μ položaj centra mase na t = 0. Koristeći Green-Schwarz-Witten notaciju slijedi da je izraz za položaj zatvorene strune dat kao:

$$X^\mu = x^\mu + l^2 p^\mu \tau + \frac{i}{2} l \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} e^{-2in\tau} (a_n^\mu e^{2in\sigma} + \tilde{a}_n^\mu e^{-2in\sigma}).$$

Važno je da funkcije X_R^μ i X_L^μ moraju zadovoljavati jednačine ograničenja za tzv. light-cone koordinate (σ^+, σ^-) koje su ekvivalentne koordinatama σ, τ :

$$(\partial_+ X^\mu)^2 = (\partial_- X^\mu)^2 = 0,$$

što je ekvivalentno zahtjevu da tenzor energije i impulsa $T_{\mu v}$ nestaje. Od sada biramo jedinice vremena i prostora takve da je $l = 1$. U spektru kvantizirane zatvorene strune pojavljuju se određena stanja koja za rezultat daju neke čestice, među kojima je i graviton. Da bi se opisala ta stanja potrebno je izvršiti kvantizaciju u kojoj veliku ulogu igra kvantizacija svjetlosnog konusa. U specijalnoj i opštoj relativnosti, svjetlosni konus je put kojeg bi snop svjetlosti, koji proizlazi iz jednog događaja (lokaliziranog u jednoj tački u prostoru i jednom trenutku u vremenu) i putuje u svim smjerovima, prolazio kroz prostor-vrijeme. Ako zamislimo da je svjetlost ograničena na dvodimenzionalnu ravan, snop svjetlosti se širi u krug nakon događaja, a ako krug crtamo sa vertikalnom osi grafika koja predstavlja vrijeme, rezultat je konus, poznat kao svjetlosni konus. U stvarnosti postoje tri dimenzije, pa bi svjetlost formirala sferu koja se širi ili skuplja u 3D prostoru, a ne kružnicu u 2D, a svjetlosni konus bi bio četverodimenzionalna verzija konusa čiji presjeci kreiraju 3D sfere (analogno normalnom trodimenzionalnom konusu čiji presjeci kreiraju 2D krugove), ali je koncept lakši za vizualizaciju kada se broj prostornih dimenzija smanji sa tri na dvije. U teoriji struna, gauge svjetlosnog konusa popravlja invarijantnost reparametarizacije na worldsheet-u strune $X^+(\sigma, \tau) = p^+ \tau$ gdje je p^+ konstanta (impuls).

3 KVANTIZACIJA

Da bi izračunali spektar strune, potrebno je da teoriju kvantiziramo što podrazumijeva proces prelaženja od zakona u klasičnoj fizici na odgovarajuće kvantne zakone, odnosno uvođenje određenih kvantnih operatora. Kvantizacija nije jednostavan postupak i ono što nas zanima jeste: postoji li Hilbertov prostor stanja $|\psi\rangle$ takav da se mogu definisati operatori $X^\mu(\sigma,\tau)$ koji će omogućiti reparametarizacijske transformacije za (σ,τ) koordinate. Potrebno je osigurati Lorentzovu invarijantnost. Postoji nekoliko ekvivalentnih postupaka preko kojih se vrši kvantizacija: stara kovarijantna kvantizacija, kovarijantna kvantizacija preko integrala puta, kvantizacija svjetlosnog konusa i BRST kvantizacija. U nastavku će se opisati kvantizacija svjetlosnog konusa, počevši od gauge popravke svjetlosnog konusa, preko kojeg će se ispoljiti kritična dimenzija prostor–vremena.

3.1 Kvantizacija svjetlosnog konusa

Potrebno je da se kvantizacija svjetlosnog konusa primijeni na prostorno-vremenske koordinate. Pretpostavimo da je prostor-vrijeme D-dimenzionalno, odnosno da se sastoji od D koordinata. Krenimo od gauge fiksirane relacije za kretanje strune:

$$S = \int d\tau L(\tau);$$

$$L(\tau) = \frac{T}{2}\int d\sigma\Big((\dot{X}^\mu)^2 - (X^{\mu'})^2\Big).$$

L je Lagrange-ova funkcija, $\dot{X}$ predstavlja parcijalni izvod $\partial X/\partial\tau$ a $X' = \partial X/\partial\sigma$. Sljedeći postupak je definisati impuls obzirom na $\dot{X}^\mu$:

$$P^\mu = T\dot{X}^\mu.$$

Koristimo komutaciona pravila:

$$\big[X^\mu(\sigma), X^\nu(\sigma')\big] = \big[P^\mu(\sigma), P^\nu(\sigma')\big],$$

$$\big[X^\mu(\sigma), P^\nu(\sigma')\big] = i\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma'),$$

gdje je $\eta^{\mu\nu} = diag(-1,1,...1)$ dijagonalna matrica, a ovo bi trebalo implicirati pravila komutacije za parametre x^μ, p^μ, a_n^μ i $\tilde{a}_n^\mu$. Integracijom preko σ i koristeći :

$$\int_0^\pi cos\ m\sigma\ cos\ n\sigma\ d\sigma = \frac{1}{2}\pi\delta_{mn},$$

izvodimo sljedeće relacije za otvorenu strunu:

$$x^\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\sigma X^\mu(\sigma),$$

$$p^\mu = \frac{1}{Tl^2\pi}\int_0^\pi d\sigma P^\mu,$$

$$\alpha_n^\mu = \frac{1}{\pi l}\int_0^\pi d\sigma\ cos\ n\sigma\ \Big(\frac{P^\mu}{T} - inX^\mu(\sigma)\Big),$$

$$\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^\dagger.$$

Za ove koeficijente komutaciona pravila se pišu kao:

$$[x^\mu, x^\nu] = [p^\mu, p^\nu] = 0;$$

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = \frac{1}{\pi^2 l^2 T}\int_0^\pi d\sigma\ cos\ m\sigma\ cos\ n\sigma\ (m-n)\ \eta^{\mu\nu} = 0;\ n, m > 0$$

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_{-n}^\nu] = \frac{1}{\pi^2 l^2 T}\int_0^\pi d\sigma\ cos\ m\sigma\ cos\ n\sigma\ (m-n)\ \eta^{\mu\nu} = n\delta_{mn}\eta^{\mu\nu}.$$

Posljednja jednačina pokazuje da su prostorne komponente α_n^μ zapravo operatori anihilacije (poništenja):

$$[\alpha_m^i, (\alpha_n^j)^\dagger] = n\delta_{mn}\delta^{ij}.$$

Dodatni faktor n znači da operatori sadrže dodatne faktore normalizacije $\sqrt{n}$ i da je operator:

$$(\alpha_n^i)^\dagger \alpha_n^i = nN_{i,n}$$

gdje je $N_{i,n}$ broj eksitacija. U obzir se mora uzeti neobičan komutacijski odnos između vremena i energije u kombinaciji sa jednačinama ograničenja. Polazeći od proizvoljnih valnih funkcija u prostoru i vremenu, ograničenja će nametnuti jednačine koje odgovaraju uobičajenim talasnim jednačinama. Prije nametanja ograničenja koristi se Hilbertov prostor kvantnih stanja sa fiksnim brojem čestica kojeg je potrebno pojednostaviti na sisteme promjenjivog broja čestica. Uvodi se pojam Fockovog prostora kvantnih stanja koji ujedinjuje Hilbertove prostore različitog broja čestica. Uvode se operatori koji povezuju Hilbertove prostore različitog broja čestica. To su operatori stvaranja i poništenja (anihilacije) čestica. Isto se može primijeniti i za strune.

Postoji jedna (otvorena ili zatvorena) struna (u kasnijoj fazi može se sastaviti stanje sa više struna). Ova pojedinačna struna ima centar mase opisan valnom funkcijom u prostoru i vremenu, koristeći sve D operatore x^μ. Zatim slijedi eksitacija struna. Način eksitacije struna obično se naziva *stanje vakuuma* $|0\rangle$. Ovaj vakuum ne znači da nema niti jedne strune nego da nema pobuđenja na struni (razlikuje se od prostornog vakuuma u kojem se ne nalaze strune). Zatim se dobiju sva eksitovana stanja struna puštajući da operatori stvaranja $(\alpha_n^i)^\dagger = \alpha_{-n}^i,\ n > 0$ djeluju u konačnom broju puta na ovaj vakuum. Ako izričito označimo i ukupni impuls struna, dobit ćemo stanja $|p^\mu, N_{1,1}, N_{1,2}, ...\rangle$. U ovom Hilbertovom prostoru su svi x^μ i p^μ operatori i djeluju na valne funkcije koje mogu biti bilo koje funkcije od x^μ. Jednačine ograničenja za otvorenu strunu i za zatvorenu strunu gauge svjetlosnog konusa:

$$\alpha_n^- = \frac{1}{2p^+}\sum_k \alpha_k^{tr}\alpha_{n-k}^{tr} = \frac{1}{2p^+}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{D-2}\alpha_k^i\alpha_{n-k}^i$$

$$\alpha_n^- = \frac{1}{p^+}\sum_k \alpha_k^{tr}\alpha_{n-k}^{tr}; \qquad \tilde{\alpha}_n^- = \frac{1}{p^+}\sum_k \tilde{\alpha}_k^{tr}\tilde{\alpha}_{n-k}^{tr}$$

a u klasičnoj teoriji (n=0) jednačina ograničenja za impuls p^- :

$$p^- = \frac{1}{2p^+}\sum_{i=1}^{D-2}\big((p^i)^2 + \sum_{m\neq 0}\alpha_{-m}^i\alpha_m^i.$$

Izmjenom operatora stvaranja i operatora anihilacije i primjenom te izmjene na prethodnu relaciju može se dobiti izraz za *masu stanja strune*:

$$M^2 = 2p^+p^- - \sum_{i=1}^{D-2}(p^i)^2 = 2\sum_{i=1}^{D-2}\sum_{m=1}^{\infty}(\alpha_m^i)^\dagger\alpha_m^i + ...$$

Operatori poštuju različita pravila komutacije. Komutaciona pravila važe samo za transverzalne dijelove ovih operatora, a ne za + i - komponente, pa će se morati izračunati pomoću ograničenja. *U kvantizaciji svjetlosnog konusa samo transverzalni oscilatori uzrokuju pobuđenja na struni pa se samo oni pojavljuju u operatoru broja stanja.* Do ovog trenutka nije bio važan redoslijed operatora. Ovdje, s druge strane, prebacivanje redoslijeda proizvelo bi konstantu, uporedivu sa "energijom vakuuma". Konstanta a se pojavila kao posljedica izmjene operatora stvaranja i anihilacije:

$$a = -\frac{(D-2)}{2} \sum_{n \geq 1} n.$$

Kakva bi trebala biti ta konstanta ovdje? Odlučeno je uzeti proizvoljni koeficijent $-2a$:

$$M^2 = 2\Big(\sum_{i,n} n N_{i,n} - a \Big).$$

Član $\frac{1}{2}M^2$ povećava se za najmanje jednu jedinicu svaki put kada djeluje operator $(\alpha_n^i)^\dagger$. Ovaj operator može povećati angularni moment stanja najviše za jednu jedinicu (Wigner-Eckart teorema). Očigledno, $\alpha' = \frac{1}{2}$ u našim jedinicama, što je usvojeno zajedno sa $l = 1$. U ovom trenutku pojavljuje se nešto čudno. Stanje s najnižom masom, nazvano $|0\rangle$, okarakterisano je sa $\frac{1}{2}M^2 = -a$, ali čini se da nije degenerisano: postoji samo jedno takvo stanje. Ako se računaju prvo sva eksitovana stanja slijedi da je $\frac{1}{2}M^2 = 1 - a$. Jedini način da se takva stanja dobiju je počevši od prvog pobuđenog stanja strune:

$$|i\rangle = \alpha_{-1}^i |0\rangle \ ; \quad i = 1, ...D-2.$$

Zbog prostornog indeksa i, ova stanja se transformišu kao vektor u prostor - vremenu i opisuju 'česticu' sa spinom 1. Ali oni imaju samo $D-2$ komponenata, dok spin jedne čestice ima $D-1$ komponenata (3 ako su prostor-vrijeme 4-dimenzionalni: ako je $l = 1, m = \pm 1$ ili 0). Jedini način da se dobije spin jedne čestice sa $D-2$ komponentama je ako ovo stanje ima masu nula, poput fotona. Gauge invarijantnost tada može ukloniti jedan fizikalni stepen slobode. Kako prvo pobuđeno stanje ima samo transverzalnu polarizaciju, zaključuje se da je to stanje bez mase. Zbog toga teorija zahtijeva da je $a = 1$ što ujedno daje osnovno stanje negativne mase: $\frac{1}{2}M^2 = -a = -1$. Teorija upravo time pokazuje da sadrži ***tahion***, česticu negativne mase koja se kreće brže od svjetlosti, kojeg može ukloniti samo supersimetrija. Da bi vidjeli koja stanja se pojavljuju u spektru zatvorene strune potrebno je prvo opisati kvantizaciju zatvorene strune.

3.2 Kvantizacija zatvorene strune

Zatvorena struna je opisana relacijom u prethodnom poglavlju. U kvantizaciji moramo obratiti posebnu pažnju na redoslijed umnožavanja koeficijenata. Međutim, ako je $n \neq 0$, izraz za α_n^- sadrži samo izraze u kojima dva α operatora komutiraju, tako da možemo dobiti operatore:

$$\alpha_n^- = \frac{1}{p^+} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{D-2} \alpha_k^i \alpha_{n-k}^i;$$

$$\tilde{\alpha}_n^- = \frac{1}{p^+} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{D-2} \tilde{\alpha}_k^i \tilde{\alpha}_{n-k}^i.$$

Sličan postupak kvantizacije kao i za otvorenu strunu daje komutacijske relacije:

$$[x^\mu, p^\nu] = -\eta^{\mu\nu} \ ; \ [\alpha_m^i, (\alpha_n^j)] = [\tilde{\alpha}_m^i, (\tilde{\alpha}_n^j)] = m\delta_{m+n}\delta^{ij} \ ; \ [\tilde{\alpha}_n^\mu, (\alpha_m^\nu)] = 0.$$

U nultom načinu koji opisuje kretanje zatvorene strune i predstavlja koordinatu centra mase strune, važno je gledati redoslijed kojim su napisani operatori α. Izrazi će imati smisla samo ako se u beskonačnoj sumi operatori stvaranja pojave sa lijeve strane, a operatori anihilacije sa desne strane, u protivnom svi izrazi u sumi daju doprinose sabirajući se u beskonačnost. Kao u izrazu za masu strune, pretpostavlja se da, nakon normalnog redoslijeda α, ostaju konačne konstante a i $\tilde{a}$ pa slijedi :

$$\alpha_0^- = \frac{1}{p^+} \sum_{i=1}^{D-2} \left(\alpha_0^i \alpha_0^i + 2 \sum_{k>0} \alpha_{-k}^i \alpha_k^i - 2a \right).$$

Slična relacija se dobije i za pomak udesno. Sada vrijedi da je:

$$M^2 = 2p^+p^- - (p^{tr})^2 = 8\Big(\sum_{i=1}^{D-2} \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m^i)^\dagger \alpha_m^i - \tilde{a} \Big) = \Big(\sum_{i=1}^{D-2} \sum_{m=1}^{\infty} (\tilde{\alpha}_m^i)^\dagger \tilde{\alpha}_m^i - \tilde{a} \Big).$$

Za razliku od teorije polja operatori stvaranja i anihilacije ne stvaraju niti poništavaju strune, već pobuđenja (eksitacije) na njima. Kao što se vidi iz prethodnih relacija, zatvorene strune u kvantizaciji svjetlosnog konusa opisane su sa dva skupa transverzalnih oscilatora α_n^i i $\tilde{\alpha}_n^i$. Treba odrediti koja stanja se pojavljuju u spektru zatvorene strune.

3.3 Spektar zatvorene strune

Započinje se konstrukcijom Hilbertovog prostora koristeći nulto vakuum stanje $|0\rangle$ što zadovoljava relaciju:

$$\alpha^i_m|0\rangle = \tilde{\alpha}^i_m|0\rangle = 0, \quad \forall m > 0.$$

Masa ovog stanja je data kao:

$$M^2|0\rangle = 8(-a)|0\rangle = 8(-\tilde{a})|0\rangle \ ; \quad (a = \tilde{a}).$$

Prvo eksitovano stanje može se konstruisati kao: $|i\rangle \equiv \alpha^i_{-1}|0\rangle$, a njegova masa je data kao:

$$M^2|i\rangle = 8\Big(\sum_{j=1}^{D-2}\sum_{m=1}^{\infty}(\alpha^j_m)^\dagger\alpha^j_m - a\Big)\alpha^i_{-1}|0\rangle = 8\sum_{j=1}^{D-2}(\alpha^j_1)^\dagger[\alpha^j_1, \alpha^i_{-1}]|0\rangle - a|i\rangle$$

$$= 8|i\rangle - 8a|i\rangle = 8(1-a)|i\rangle \Rightarrow M^2 = 8(1-a).$$

Međutim, zbog ograničenja nametnutih za desni pomak slijedi:

$$M^2|i\rangle = 8\Big(\sum_{j=1}^{D-2}\sum_{m=1}^{\infty}(\tilde{\alpha}^j_m)^\dagger\tilde{\alpha}^j_m - a\Big)|i\rangle = -8a|i\rangle \Rightarrow M^2 = -8a.$$

Ovo je kontradiktorno pravilima i vektorsko stanje ne zadovoljava ograničenja što znači da to nije element konstruisanog Hilbertovog prostora. Sljedeće stanje koje se konstruiše je stanje tenzora:

$$|i, j\rangle \equiv \alpha^i_{-1}\tilde{\alpha}^j_{-1}|0\rangle$$

koje ispunjava oba uslova ograničenja pa je masa data kao:

$$M^2 = 8(1-a).$$

To je prvo pobuđeno stanje koje nastaje djelovanjem sa po jednim operatorom stvaranja iz lijevog i desnog sektora na osnovno stanje. Transformira se kao tenzor ranga 2, dakle kao $(D-2)\times(D-2)$ reprezentacija pod malom grupom transformacija predstavljajući samo skup rotacija u $D-2$ dimenzijama. Za otvorenu strunu otkriveno je da je to bio razlog da nastala vektorska čestica bude *foton*, čija masa je jednaka nuli. I ovdje, dosljednost teorije zahtijeva da ta čestica tenzora bude bez mase. Reprezentacija stanja $|ij\rangle$ se

reducira na tri stanja: antisimetrično stanje, simetrično stanje bez traga i dio sa tragovima. Dimenzionalnost ovih stanja je:
• $\frac{1}{2}(D-2)(D-3)$ za antisimetrično stanje (tenzor ranga 2)
• $\frac{1}{2}(D-2)(D-1)-1$ za simetrično stanje (polje koje pripada *gravitonu*)
• 1 za dio sa tragovima (skalarna čestica nazvana *dilaton*)
Reduciranje reprezentacije se može napisati na drugi način kao:

$$e^{ij} = \frac{1}{2}\big(e^{ij} + e^{ji} - \frac{1}{12}\delta^{ij}e^{kk}\big) + \frac{1}{2}(e^{ij} - e^{ji}) + \frac{1}{24}\delta^{ij}e^{kk}$$

gdje se prvi član transformira kao bezmasena čestica spina 2, a upravo to je ***graviton***. Drugi član je antisimetrični tenzor ranga 2, a treći je skalarna čestica, odnosno dilaton. Ne postoje masivne čestice koje bi se mogle transformirati na ovaj način, pa se nameće uslov M = 0, podrazumijevajući da je a = 1 za zatvorenu strunu. Antisimetrično stanje bez mase bilo bi pseudoskalarna čestica u D = 4, dok simetrično stanje može opisati samo nešto poput gravitona. Iznad ova dva stanja, teorija predviđa da postoji beskonačan toranj masivnih stanja ali nijedno od njih nije eksperimentalno potvrđeno. Razlog tome je obrnuta proporcionalnost kvadrata mase te će sva masivna stanja u teoriji struna imati masu na Planck–ovoj skali (M_P) i time biti eksperimentalno nedostižna. Iz tog razloga se očekuje da bezmasena stanja sadrže sve čestice Standardnog modela. Značaj teorije struna se ogleda upravo u stanju bez mase spektra zatvorene strune. Potraga za gravitonom je bila glavna motivacija za razvoj teorije struna.

Dakle, prvobitne bozonske strune su predviđale da postoje tahioni što dovodi do raznih fizičkih paradoksa. Međutim, ako struna može da osciluje u 24 prostorne dimenzije onda u njoj ne postoje tahioni. Potrebno je istražiti od kakvog bi značaja bilo prostor-vrijeme od 26 dimenzija (1 za vrijeme, 1 za dužinu strune i 24 dimenzija prostora u kome struna osciluje). Analiza struna sa bozonima i fermionima otkriva da tahioni nestaju ako imamo samo 9 prostornih i 1 vremensku, znači ukupno 10 dimenzija.

Teorija nije u skladu sa svijetom koji nas okružuje i rezultat koji je dobiven za dimenziju prostor–vremena odstupa od svakodnevnog iskustva. Ipak, otvara prozor u dodatne dimenzije koje se naziru upravo preko stanja određenih čestica i relacija za masu.

4 DODATNE DIMENZIJE

Teorije struna koje odgovaraju kvantnoj gravitaciji zajedno sa tri druge poznate fundamentalne sile naizgled zahtijevaju 10 prostorno-vremenskih dimenzija. Iako se čini da živimo u četiri prostorno-vremenske dimenzije, to ne zaustavlja teoriju struna da opiše naš univerzum.Većina fizičkih teorija ima jedinstven osnovni skup polja i interakcija, ali jednačine mogu imati mnogo različitih rješenja. Postoje rješenja teorije struna u kojima 10 dimenzija imaju oblik četiri makroskopske dimenzije i šest dimenzija savijenih na način da budu gotovo nevidljive. Kako je to moguće, objašnjeno je analogijom razapete žice. Ako se iz daljine gleda žica, vidi se samo njezina dužina, odnosno jedna dimenzija. Druge dimenzije se vide tek kad se približimo. Slično se možda "skrivaju" i ostale dimenzije koje ne vidimo. Da bi se, za početak, razumjele fizičke posljedice sitnih, sabijenih dodatnih dimenzija, razmotrimo najjednostavniji primjer: strune koje se šire u devetodimenzionalnom ravnom prostor-vremenu, sa desetom dimenzijom uvijenom u krug. Ovo očito nije realistična teorija kvantne gravitacije. U teoriji struna, koncept savijanja u krug već se nevjerojatno razlikuje od onog u teoriji čestica. Potrebno je izračunati najjednostavniju fizičku observablu kada se ona sabija na kružnicu od deset do devet dimenzija, a ta observabla predstavlja upravo masu elementarnih čestica u prostoru nižih dimenzija. Pokazaće se da jedna vrsta čestica (ili struna) u 10 dimenzija proizvodi čitav beskonačan toranj čestica u devet dimenzija. Ali beskonačan toranj u slučajevima struna i čestica ima važnu razliku koja naglašava način na koji strune "vide" drugačiju geometriju od tačkastih čestica.

4.1 Kvantna geometrija i problem hijerarhije

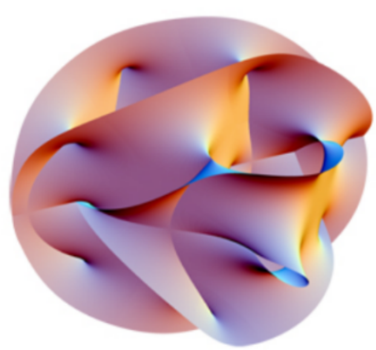
Potrebno je objasniti kako beskonačna kula 9D čestica nastaje u 10D teoriji čestica. Za 9D posmatrača, brzina i impuls date čestice u skrivenoj desetoj dimenziji su nevidljivi. Ali kretanje je stvarno, a čestica koja se kreće u desetoj dimenziji ima određenu vrijednost energije (energija nije nula). Budući da se čestica ne kreće okolo u vidljivim dimenzijama, njena energija se ne može pripisati energiji kretanja, pa 9D posmatrač tu energiju pripisuje masi čestice. Stoga je za određenu vrstu čestica u temeljnoj 10D teoriji svaka vrsta kretanja koju je dozvoljeno izvoditi duž dodatnog kruga stvorila novu elementarnu česticu iz 9D perspektive. Ono što dopušta 10D čestici kretanje po krugu je matematički opis čestice poznat kao "val vjerojatnoće". Energija čestice je povezana s frekvencijom talasa: talas više frekvencije odgovara čestici s većom energijom. Kada se kretanje čestice ograniči na krug, kao što je opisano za našu česticu koja se kreće u savijenoj desetoj dimenziji, val vjerojatnoće čestice mora oscilirati određen broj puta za određeno vrijeme dok se kreće oko kruga i vraća se do iste tačke. Svaki mogući broj oscilacija na krugu odgovara određenoj vrijednosti energije koju 10D čestica može imati, a svaka različita vrijednost energije izgledat će kao nova čestica sa drugačijom masom za 9D promatrača. Masa ovih čestica povezana je sa veličinom kruga i brojem oscilacija oko kruga: $m_0 = 0$; $m_1 = 1/R$; $m_2 = 2/R$... Prema tome, skrivena brzina u desetoj dimenziji kreira čitavu kulu čestica u devet dimenzija.

Razmotrimo teoriju struna zbijenu na istom krugu kao što je prethodno navedeno. Možemo i namotati strunu oko kružne desete dimenzije. Struna ima napetost $T_{string} = 1/\alpha'$, te ako se struna namota n puta oko kruga veličine R (n=1,2,3...), utrošiće se energija: $m_1 = R/\alpha'$; $m_2 = 2R/\alpha'$...

9D posmatrač ne može vidjeti moment(impuls) u desetoj dimenziji, također ne može vidjeti broj namotaja ove strune. Umjesto toga, vidi svako stanje namotaja, koje se odvija iznad, kao novu elementarnu česticu u 9D svijetu, sa diskretnim masama koje ovise o veličini zbijene dimenzije i napetosti strune. Napetost strune je povezana sa dužinom strune pa je zbog toga veoma velika. Ako je krug umjerene do makroskopske veličine, čestice u procesu namotavanja su nevjerojatno masivne jer je njihova masa proporcionalna veličini kruga pomnoženoj sa napetošću strune. U ovom slučaju, mase 9D elementarnih čestica u teoriji struna izgledaju približno kao one u teoriji tačkastih čestica na krugu iste veličine, jer je takve nevjerojatno masivne čestice teško vidjeti u eksperimentima. Međutim, zamislimo smanjenje R dok se ne približi skali teorije struna ili kvantne gravitacije i ne postane manje od l, tada mase postaju sve lakše. U teoriji struna sa malom, savijenom dimenzijom, postoje dva načina na koja struna može proizvesti kulu od 9D čestica: kretanje oko kruga, kao u teoriji čestica, i namotavanje oko kruga, što je jedinstveno za teoriju struna. Cijela teorija struna o krugu polupréčnika R potpuno je ekvivalentna teoriji struna na krugu poluprečnika α'/R. Ovo je vrlo jednostavna ilustracija onoga što se u teoriji struna ponekad naziva ***kvantna geometrija***, teorije struna vide geometrijske prostore male veličine na sasvim drugačiji način nego što to čine teorije čestica.

Na osnovu objašnjenja temeljnih interakcija opisanih dodatnim dimenzijama kojeg su dali Theodor Kaluza i Oskar Klein 1926.godine, peta dimenzija mogla bi se uviti u krug poluprečnika R koji je tako mali da ga niko ne bi opazio. U 5D svijetu postoje samo gravitoni, nosioci sile gravitacijskog polja. Ali, kao što je rečeno, jedna vrsta čestica u višim dimenzijama može proizvesti mnogo njih u nižim dimenzijama pa bi 5D graviton, nakon smanjenja u 4D na krugu, stvorio česticu vrlo sličnih svojstava kao foton, pored 4D gravitona. Postojao bi i čitav toranj drugih čestica, ali one bi bile prilično masivne ako je krug mali i mogu se zanemariti kao čestice koje još nisu otkrivene eksperimentom. Ovo je divna ideja, ali kao ujedinjena teorija predstavlja neuspjeh. Pored fotona, predviđa dodatne čestice koje nemaju udio u poznatim temeljnim interakcijama. Takođe ne uzima u obzir jake i slabe nuklearne sile, otkrivene nakon što su Kaluza i Klein objavili svoje radove. Ipak, moderne generalizacije ove osnovne paradigme mogu objasniti skup fundamentalnih interakcija i dati ogromne mase neželjenim dodatnim česticama, objašnjavajući njihovo odsustvo u eksperimentima sa niskom energijom.

Periodična struktura Standardnog modela ponekad ima derivaciju u modelima zasnovanim na dodatnim dimenzijama koji dolaze iz geometrije ili topologije samog prostora. Kao što je pokazano u prethodnom poglavlju osnovne elementarne čestice nastaju kao stanja najmanje energije ili osnovna stanja fundamentalne strune. Različita moguća osnovna stanja strune, kada se 6 od 10 dimenzija sabije (kompaktira), mogu se klasificirati po njihovoj topologiji. Obzirom da je teško zamisliti šest dimenzija, koristi se jed-



Slika 4. 2D prikaz jednog od šest-dimenzionalnih prostora koji izgledaju obećavajuće za kompaktifikaciju struna

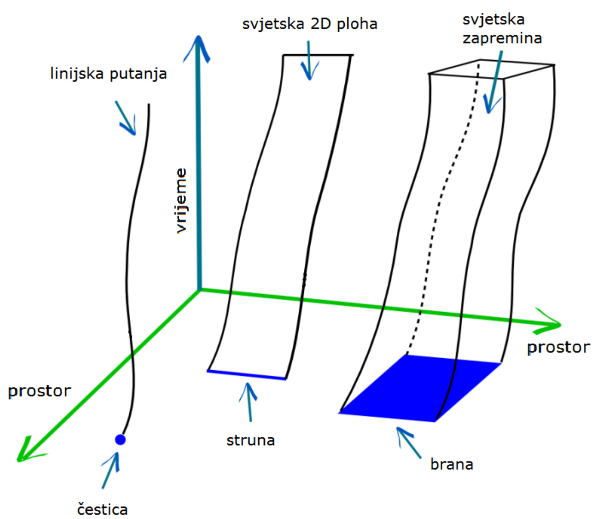
nostavniji primjer: dvije dodatne dimenzije zbijene na dvodimenzionalnoj glatkoj površini. Matematičari su klasificirali moguće topologije tako kompaktnih, glatkih dvodimenzionalnih površina u 19. vijeku. Jedine mogućnosti su takozvane ***„Riemannove površine reda g“***, označene jednim cijelim brojem koji broji šupljine u površini. Dakle, lopta za plažu ima površinu reda 0, površina krofne ima red 1, kao i šolja za kafu, a površine g reda mogu se dobiti spajanjem g površina. U 6D teoriji struna , u kojoj su dvije dimenzije zbijene, da bi razumjeli koje će čestice vidjeti 4D posmatrač, razmišlja se o tome kako namotati strune oko kompaktnih (sabijenih) dodatnih dimenzija. Odgovor ovisi o topologiji dvodimenzionalne površine. Primjer je torus koji postiže dva osnovna stabilna "načina namotavanja", odnosno moguće je omotati strunu oko kružnog presjeka i namotati strunu kroz otvor u torusu. To će dati dvije različite klase čestica. Slično tome, Riemannova površina reda g omogućila bi 2 g različitih osnovnih stabilnih stanja strune. Na taj bi se način mogla objasniti replikacija stanja jednog tipa, tako da sve strune koje omotavaju kružni presjek u bilo koji od g različitih oblika dijele ista fizička svojstva. Zatim bi se umnožavanje (replikacija) generacija moglo temeljno povezati s topologijom prostor-vremena. Međutim, osnova koja može objasniti neke parametre teorije čestica kroz topologiju je sigurno zajednička.

Još jedan problem koji se javlja u dodatnim dimenzijama odnosi se na slabost gravitacije do velike vrijednosti Planckove mase, ili sićušnost Newtonove univerzalne konstante gravitacije u odnosu na karakterističnu snagu slabih interakcija. Ovo odstupanje skala fizike čestica i gravitacije poznato je kao ***hijerarhijski problem***. Počevši od objašnjenja Newtonovog zakona gravitacijske privlačnosti gdje tačkasta masa u tri prostorne dimenzije stvara sferno simetrično gravitaciono polje, zamišlja se da je bilo dodatnih k dimenzija, svaka veličine L. Na udaljenosti od tačkaste mase koja je mala u odnosu na L, gravitacijske linije polja i dalje bi se širile kao da su u ravnom prostoru dimenzija 3 + k. Na udaljenosti r, linije polja prelazile bi površinu hipersfere radijusa r, koja raste kao r^{2+k}. Stoga gustina linija polja i jačina polja opadaju kao $1/r^{2+k}$ - mnogo brže nego u trodimenzionalnom prostoru. Međutim, na udaljenosti velikoj u odnosu na L, kompaktne dimenzije nisu važne - ne može se postići velika udaljenost kretanjem u vrlo maloj dimenziji - i gustina linija polja ponovo opada kao $1/r^2$. Izuzetno brzi pad gustine linija polja između reda udaljenosti, Planckove dužine i L ima važnu implikaciju. Snaga gravitacije smanjuje se tim dodatnim prostorom kroz kojeg linije polja moraju proći.

Jedino malo sofisticiranija verzija prethodnog argumenta pokazuje da sa k dodatnih dimenzija veličine L, jedna ima 3+1 dimenzionalnu Newtonovu konstantu koju mjeri kao $L - k$. To znači da bi gravitacija mogla biti jaka kao i druge sile, ako su dodatne dimenzije koje još nismo vidjeli velike (naravno, u Planckovim jedinicama). Zatim, relativna slabost gravitacije u svakodnevnom svijetu objasnila bi se jednostavno činjenicom da je snaga gravitacije razblažena (dilutirana) velikim volumenom dodatnih dimenzija, gdje je također prisiljena da se širi.

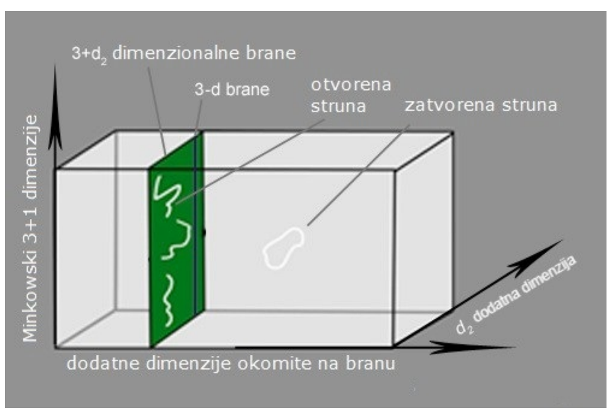
4.2 Interakcije i p brane

Pored struna, teorija sadrži još jedan tip osnovnog objekta poznatijeg kao *brane* i koji može imati mnogo više dimenzija. Naš univerzum je zapravo "zaglavljen" unutar trodimenzionalne brane (3-brane). Tačnije, brane predstavljaju prošireni objekt s određenim brojem dimenzija, od kojih su strune primjeri sa jednom dimenzijom. Definišu se kao fizički objekt koji generalizira pojam tačkaste čestice na veće dimenzije. To su dinamički objekti koji se mogu širiti kroz svemir i vrijeme prema pravilima kvantne mehanike. Imaju masu i mogu imati druge osobine, poput naelektrisanja. Prethodno



Slika 5. Pojednostavljen prikaz brane

objašnjenje slabosti gravitacijske sile sadrži određene nesaglasnosti. Pretpostavimo da sve poznate sile zaista postoje u dimenziji 4 + k, a ne u četiri posmatrane dimenzije. Tada će se linije polja drugih interakcija, poput elektromagnetizma, razrijediti poput gravitacije, a primijećena razlika između sile gravitacije i elektromagnetizma u 4D jednostavno će se pretvoriti u nesrazmjer u dimenzijama 4 + k. U teoriji struna, vrlo elegantan mehanizam može ograničiti sve interakcije osim gravitacije, koja je univerzalna i vezana direktno za geometriju prostor-vremena, za naše četiri dimenzije. To je zato jer teorije struna imaju ne samo strune, već i brane. Izvedene iz termina "membrane", mogu se klasificirati u nekoliko kategorija od kojih su najpoznatije ***p-brane i D-brane***. P-brana je p-dimenzionalna površina. D-brane su klasa produženih objekata na kojima otvorene strune mogu završiti s Dirichletovim graničnim uvjetima. Tačkasta čestica može se posmatrati kao brana dimenzije nula, dok se struna može posmatrati kao jednodimenzionalna brana. Dakle, struna je vrsta 1-brane, 2-brana se može zamisliti kao list papira koji se proteže u smjerovima x i y, i tako dalje. P-brane postoje za p različitih vrijednosti kao rješenja 10D jednačina kretanja. Do sada su strune prikazane kao zatvorene petlje. Međutim, strune se mogu otvoriti i završiti na p-brani. Otvorene strune koje se završavaju na ovaj način proizvode skup čestica koje "žive" upravo na toj p-brani i koje se nazivaju "modovi otvorene strune" te odgovaraju najnižim pobuđenim stanjima energija otvorene strune. U uobičajenim modelima, ovaj skup modova otvorene strune se može porediti sa fotonima. Na taj način je lako definisati modele elektromagnetne sile, pa čak i slabe i jake sile, ograničene na 3-brane ili više dimenzionalnu p-branu u 10D prostor-vremenu. U ovom slučaju, slabost gravitacije mogla bi



Slika 6. Strune se mogu otvoriti i završiti na brani

biti direktna posljedica velike neprimjećene zapremine u dodatnim prostor-vremenskim dimenzijama. Tada bi se linije gravitacionog polja razblažile u dodatnim dimenzijama (a time slabile našu percepciju gravitacije), dok linije elektromagnetnog polja ne bi. Pored prethodno navedenog, veliki značaj se ogleda i u *interakcijama* oscilirajućih struna u prostoru i vremenu. Same interakcije kao pojam međusobnog djelovanja struna ili struna sa vanjskim poljem vode ka opisivanju kompaktnih dodatnih dimenzija. S druge strane, izbor D = 26 je nužan ako želimo zadržati Lorentzovu invarijantnost. Interakcija je također uključena ili dodavanjem termina koji opisuje interakciju strune sa vanjskim poljem ili korištenjem funkcionalnog formalizma. U nastavku ću opisati neke detalje prvog pristupa za slučaj otvorene strune. Opisivanje interakcije struna podrazumijeva dodavanje slobodnoj relaciji strune dodatni izraz koji opisuje interakciju strune s vanjskim poljem. Relaciju možemo pisati kao:

$$S_{INT} = \int d^D y \phi_L(y) J_L(y)$$

gdje je $\phi_L(y)$ vanjsko polje, a J_L struja koju generiše struna. Indeks L označava moguće Lorentzove indekse. Ovakav pojam interakcije neće dati nikakve podatke o interakciji čestice, ali u slučaju strune, vidjet ćemo da će S_{INT} opisati interakcije među strunama. Vanjska polja koja mogu interagovati sa strunom su samo ona polja koja odgovaraju raznim stanjima strune. To je posljedica činjenice da zbog dosljednosti moraju postojati sljedeća ograničenja na S_{INT}:

∗ Operator u prostoru koji obuhvata oscilatore struna mora biti dobro definisan.

∗ Mora sačuvati invarijantnost (nepromjenjivost) u teoriji slobodnih struna, tačnije mora biti konformalno invarijantan.

∗ U slučaju otvorene strune, interakcija se događa na krajnjoj tački strune (recimo na $\sigma = 0$). Ovo proizlazi iz činjenice da dvije otvorene strune međusobno djeluju povezujući se na krajnjim tačkama.

Najjednostavnija skalarna struja nastala kretanjem strune može se napisati na sljedeći način:

$$J(y) = \int d\tau \int d\sigma \delta(\sigma) \delta^{(d)}[y^\mu - x^\mu(\tau, \sigma)]$$

gdje je $\delta(\sigma)$ uveden jer se interakcija događa na kraju strune. Upotrebom relacije za ravanski talas i skalarno polje $\phi(y) = e^{iky}$, dobivamo slijedeću interakciju pod konformalnom transformacijom $\tau \to \omega(\tau)$:

$$S_{INT} = \int d\tau \; e^{ikX(\tau,0)} = \int d\omega \; e^{ikX(\omega,0)}.$$

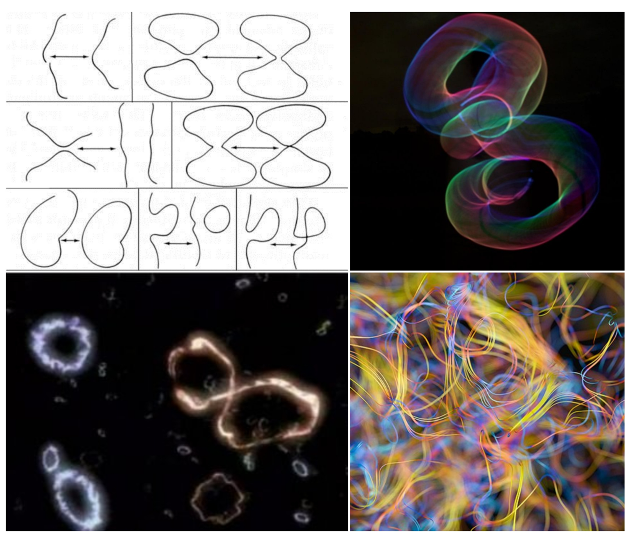
To znači da podintegralna funkcija mora biti konformalno polje[4] sa konformalnom dimenzijom jednakom jedinici ($\alpha' k^2 = 1$). Vanjsko polje tada odgovara najnižem tahionskom stanju otvorene strune. Druga jednostavna struja koju generiše struna iznosi:

$$J_\mu(y) = \int d\tau \int d\sigma \delta(\sigma) \dot{X}_\mu(\tau, \sigma) \delta^{(d)}(y - X(\tau, \sigma)).$$

Ovu relaciju uvrstimo u S_{INT} i slijedi:

$$S_{INT} = \int d\tau \dot{X}_\mu(\tau, 0) \epsilon^\mu e^{ikX(\tau,0)}$$

gdje je $\phi_\mu(y) = \epsilon^\mu e^{iky}$ ravanski talas, a vertex operator $k^2 = \epsilon k = 0$ konformalno invarijantan. Prema tome, vanjski vektor mora biti fotonsko stanje strune bez mase. Ovaj postupak se može generalizovati na proizvoljno vanjsko polje, a rezultat je da možemo koristiti samo vanjska polja koja odgovaraju na fizičkim stanjima strune. Može se nastaviti u slučaju vanjskih gravitona uvodeći u Nambu-Goto akciju ciljanu metriku prostora i dobivanjem vertex operatora za graviton.



Slika 7. Vizuelni prikaz mogućih interakcija struna

[4]Dvodimenzionalna teorija konformalnog polja je kvantna teorija polja na Euklidskom dvodimenzionalnom prostoru, koja je invarijantna pod lokalnim transformacijama.

4.3 Kompaktne dimenzije

Dodatne dimenzije su vjerovatno najpoznatija karakteristika teorije struna. Cilj njihovog opisivanja jeste dati precizno značenje populariziranoj izjavi da *„male dodatne dimenzije nisu vidljive u fizici niskih energija“* i objasniti jedan od najopćenitijih eksperimentalnih predviđanja dodatnih dimenzija. Prvo je potrebno razviti najjednostavniju realizaciju interakcije između uobičajenih (beskonačnih) dimenzija i malih kompaktnih dimenzija: čestica na cilindru.

4.3.1 Slobodna čestica na cilindru

Počinje se od pojednostavljene situacije gdje se razmatra čestica koja se slobodno kreće po beskonačnom cilindru poluprečnika R, sa jednim beskonačnim smjerom duž cilindra i jednim kompaktnim smjerom, oko cilindra. Modeliranje čestice na ovoj površini je prilično jednostavno: razmatra se valna funkcija $\psi(x,y)$, sa nametnutim uvjetom periodičnosti $\psi(x,y) = \psi(x,y+2\pi R)$. Koordinata x obuhvaća beskonačnu dimenziju, često nazvanu z u cilindričnim koordinatama i y odgovara $R \times \theta$. Kako nas zanima kretanje slobodne čestice, Hamiltonijan je jednostavno dat sa:

$$H = -\frac{\hbar}{2m}\partial_x^2 - \frac{\hbar}{2m}\partial_y^2$$

i sugerira pristup:

$$\psi_\lambda = e^{(ik_x x + ik_y y)}$$

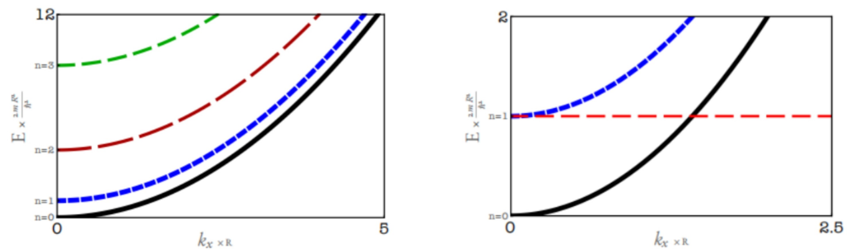
pa je vlastita funkcija sa vlastitom vrijednosti:

$$\lambda(k_x, k_y) = \frac{\hbar}{2m}(k_x^2 + k_y^2).$$

Energetski spektar je parametriziran sa dva kvantna broja:

$$E_n(k_x) = \frac{\hbar}{2m}\left(k_x^2 + \frac{n^2}{R^2}\right)$$

što se može grafički predstaviti u ravni (E_n, k_x) za različite vrijednosti n, kao na slici:



Grafik 1. Grafik 2.

Slika 8. Grafici vlastite energije za slobodnu česticu na cilindru

Spektar je sastavljen od kontinuiranih opsega za fiksne vrijednosti n, a svaki raspon je od minimalne vrijednosti ε_n do beskonačnosti, sa

$$\varepsilon_n = \frac{n^2\hbar}{2mR^2}.$$

Međutim, grafik 2. prikazuje niskoenergetski dio ovog spektra koji ima veći značaj. Pri energijama ispod ε_1 dostupan je jedan neprekinuti opseg, $n = 0$, a kao posljedica toga, postoji odnos jedan na jedan između energije sistema ispod ε_1 i momenta duž cilindra $p_x = \hbar k_x$ i to je tačno odnos energije i momenta jednodimenzionalne slobodne čestice:

$$E(k_x) = \frac{(\hbar k_x)^2}{2m} = \frac{p_x^2}{2m}.$$

Energija je potpuno neovisna o poluprečniku, koji ostaje validan sve dok je energija ispod ε_1, ili sve dok je $k_x^{-1} > R$, prema tome fizika niskih energija nije ovisna o fenomenu na kratkim udaljenostima. Još jedna manifestacija ovog svojstva vidljiva je na nivou valne funkcije: $\psi_{0,k_x}(x,y) = exp(ik_x x)$, nezavisno od y. Dakle, čestica se kreće duž cilindra, a ne oko njega:

$$\hat{p}_x \psi_{0,x} = (-i\hbar\partial_x)\psi_{0,x} = \hbar k_x,$$

$$\hat{p}_y \psi_{0,x} = (-i\hbar\partial_y)\psi_{0,x} = 0.$$

Ovo zapravo otkriva suštinu zašto su kompaktne dimenzije nevidljive pri niskim energijama. U slučaju sa jednom dodatnom dimenzijom, kao i na cilindru, ne postoji moment na krugu sa malim energijama, uobičajeni odnos između 3D momenta i energije ostvaruje se relacijom: $E = \vec{p}^{\,2}/(2m)$, a vlastite funkcije su 3D ravanski talasi $\psi_{\vec{p}} = exp(i\vec{p}\,\vec{x}/\hbar)$. Još jednom su male dodatne dimenzije nevidljive za fiziku niskih energija.

Isti zaključak važi i za sferne dodatne dimenzije gdje su zbog boljeg uvida u opštu strukturu dodatnih dimenzija, umjesto kruga razmatrane dvije dodatne dimenzije koje kreiraju sferu poluprečnika R. Biraju se koordinate: ζ_1 kao kolatitude - sferni ugao poznatiji kao θ i ζ_2 kao ϕ. Vlastite funkcije za ovaj operator su sferni harmonici, označeni sa Y_l^μ i koji se pojavljuju u sistemima sa sfernom simetrijom. Konkretno, oni su vlastite funkcije sfernog Laplasijana sa vlastitim vrijednostima $l(l+1)$, što znači da su vlastite energije $E_l = \frac{\hbar^2}{2mR^2}\ l(l+1)$ neovisne od μ, što dovodi do degeneracije $2l+1$ za svaki nivo. Najniža vlastita vrijednost funkcije proporcionalna je Y_{00}, ima konstantne veličine θ i ϕ, pa se analiza prethodnih slučajeva ponavlja: ispod praga energije $\hbar^2/2mR^2$, nema potvrde da postoje dodatne dimenzije.

4.3.2 Opšti slučaj

Nakon prethodnih primjera, potrebno je razmotriti proizvoljne dodatne dimenzije. Valna funkcija ovisit će o $3+n$ koordinatama $(\vec{x}, \zeta_i)$, gdje ζ_i predstavlja parametar nekog prostora M čiji je Laplasijan ΔM i zavisi samo od ζ_i. Sada je lako napisati Hamiltonijan:

$$H_{3+n} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{3D} - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta_M.$$

Dati prostor M se uvijek može ravnomjerno skalirati množenjem svih dužina s datim faktorom, što se izražava i preko vlastitih vrijednosti. Vlastite funkcije Hamiltonijana su:

$$\psi(\vec{x}, \zeta_i)_{\vec{k},j,l} = exp\big(i\vec{k}\vec{x}\big)\chi_j^l(\zeta_i)$$

gdje su $\chi_j^l(\zeta_i)$ vlastite konstantne funkcije, a pridružene vlastite energije su:

$$E_j(\vec{k}) = \frac{\hbar^2}{2m}\Big(\vec{k}^2 + \frac{\lambda_j}{L^2}\Big).$$

Ovdje je L tipična skala dužine povezana s našim prostorom, kao što su i prečnici kruga i sfere koje smo razmatrali u ranijim primjerima, a njeno skaliranje prema gore ili dolje mijenja energiju na kojoj se pojavljuju *ekstradimenzionalni efekti - efekti dodatnih dimenzija.* Za energije znatno ispod $\lambda_1 \times \hbar^2/2mL^2$, ili ekvivalentno za talasne dužine veće od $L/\sqrt{\lambda_1}$, sistem koji opisujemo identičan je slobodnoj trodimenzionalnoj čestici.

4.4 Relativistički pristup dodatnim dimenzijama

Dakle, fizika niske energije neosjetljiva je na postojanje malih dodatnih dimenzija. Sačuvana je i globalna struktura spektra, s odvojenim pobuđenjima koje imaju stalni doprinos pored kontinuirane kinetičke energije. Međutim, ta konstantna ekstradimenzionalna kinetička energija ima nove posljedice nakon što se uzme u obzir relativnost. Iako je pravi način opisivanja relativističke kvantne fizike zapravo kvantna teorija polja, u nastavku se koristi relativistička mehanika talasa koja nadograđuje Schrödingerovu jednačinu Klein-Gordonovom jednačinom. Kao što je slobodna Schrödingerova jednačina ustvari kvantizacija mehaničke energije slobodne nerelativističke čestice $E = \vec{p}^{\,2}/(2m)$, Klein-Gordonova jednačina je kvantizacija relativističke energije: $E^2 = \vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4$ i postaje:

$$(i\hbar\partial_t)^2 = \big((-i\hbar\vec{\nabla})^2c^2 + m^2c^4\big)\psi.$$

Ova jednačina definiše spektar kvadrata Hamiltonijana:

$$\hat{E}^2\psi = H^2\psi = \big((\hbar c)^2\Delta + m^2c^4\big)\psi.$$

U uobičajenom 3D prostoru, ova jednačina nije mnogo drugačija od one već riješene i ravanski talasi su opet vlastite funkcije, sa vlastitim vrijednostima E^2. Nadogradnja na sfernu dodatnu dimenziju je direktna, pa je kvadrat Hamiltonijana dat relacijom:

$$H^2 = (\hbar c)^2(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 + \partial_\zeta^2) + m^2c^4$$

te se nalazi kvantizirani moment u dodatnoj dimenziji, dajući istu opštu strukturu neprekidnih pojasa energije:

$$E_n^2(\vec{k}) = (\hbar c)^2\Big(\vec{k}^2 + \frac{n^2}{R^2}\Big) + m^2c^4.$$

Kao i u nerelativističkom pristupu, postoji jaz ispod kojeg je odnos energije i momenta identičan slučaju bez dodatnih dimenzija: $E^2 = \vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4$. Prvo pobuđenje pojavljuje se za energije iznad $(\hbar c)/R$, koje su sada neovisne o masi, ali znače da *manje dimenzije zahtijevaju veće energije da bi bile ispitivane*. Ako se razmatra zanimljiv slučaj ponašanja pobuđenja sa stanovišta posmatrača u 3D-u jasno je da je za 3 + nD posmatrača to samo slobodna čestica koja se kreće u prostoru 3 + nD. Međutim, 3D posmatrač bi vidio eksitaciju kao česticu koja se kreće proizvoljnim momentom $\hbar\vec{k}$ u 3D prostoru.

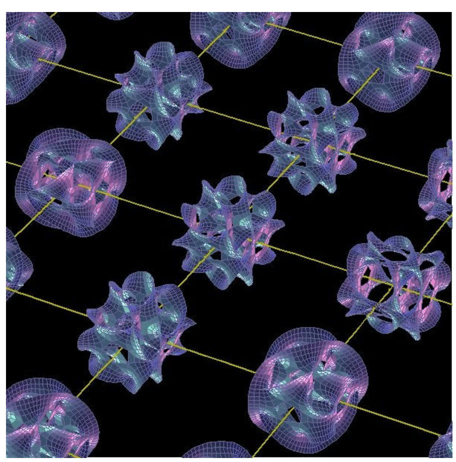
Opšta metoda mjerenja mase čestica je nezavisno mjerenje njihove energije i njihovog momenta te se računa kao:

$$m_p^2 = \frac{1}{c^4}(E^2 - \vec{p}^2 c^2)$$

gdje je m_p masa posmatrane čestice, a za čestice na prvom pobuđenom nivou masa je data relacijom:

$$m_p^2 = m^2 + \left(\frac{\hbar}{Rc}\right).$$

Pobuđenja se ponašaju poput teških kopija čestice niske energije. Ove teške kopije su poznate kao Kaluza-Klein pobuđenja. Objašnjenje je jednostavno: kinetičku energiju u dodatnoj dimenziji ne vidi trodimenzionalni posmatrač i stoga predstavlja doprinos energiji u okviru ostatka čestice. ***Kaluza-Klein čestice*** predstavljaju način na koji eksperimenti sudara čestica u sudaraču mogu ispitati mogućnost dodatnih dimenzija. Ako su čestice putovale u više dimenzije, onda bi one trebale imati čestice partnere čija bi masa reflektovala geometriju viših dimenzija. Kompletan model sa interakcijama između čestica predviđa vjerovatnoću da sudari čestica proizvode pobuđenja u sudarima i neposmatranje novih teških čestica omogućava postavljanje ograničenja na veličinu mogućih dodatnih dimenzija. Budući da su Kaluza-Klein čestice sa masom ispod 1 TeV isključene, ako postoje dodatne dimenzije, njihov radijus mora imati veličinu $R < 2 \times 10^{19}$ m. Teško je zamisliti višedimenzionalnost, tako da ne možemo ni zamisliti sve moguće dimenzije svemira.



Slika 9. Ilustracija pokazuje mogući izgled dodatnih dimenzija

4.5 Dualnost u teoriji struna

Određene klase kvantnih teorija polja u $2 + 1$ dimenzijama potpuno su ekvivalentne teorijama kvantne gravitacije u $3 + 1$ dimenzionalnom Anti-de Sitter prostoru[5]. Fizičari kažu da su te dvije teorije dualne jedna drugoj. Precizni primjeri ove dualnosti dolaze iz teorije struna. Kompaktifikacija teorije u četiri dimenzije na različitim kompaktnim prostorima daje različite primjere AdS_4 gravitacije te primjere u raznim teorijama polja i dualnosti. U fizici, sabijanje ili kompaktifikacija znači promjenu teorije u odnosu na jednu od prostorno-vremenskih dimenzija, tako da beskonačan parametar dimenzije postaje konačan. Iako još ne poznajemo gravitacijsku dualnost svake trodimenzionalne konformalne teorije polja ili dualnost teorije polja u svakoj teoriji gravitacije u AdS_4, imamo beskonačan skup primjera izvedenih iz teorije struna.

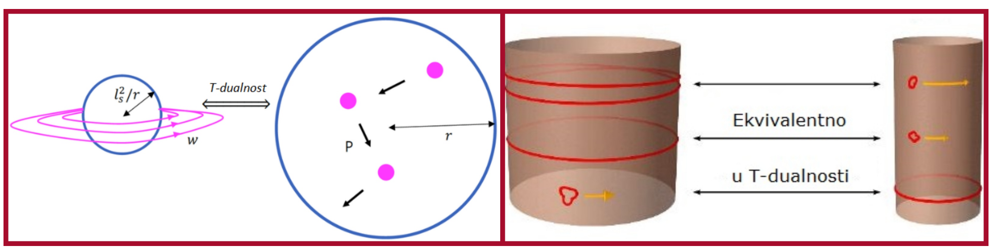
Ova dualnost ima posebno zanimljiv i koristan aspekt. Teorije dimenzija $2+1$ analogne elektromagnetizmu imaju povezane konstante g analogne naboju elektrona e. Teorija gravitacije također ima prirodnu konstantnu spojnicu, datu omjerom polupречnika zakrivljenosti prostora prema Planckovoj dužini, koja ima oznaku L. U poznatim primjerima dualnosti između prostora AdS-a i kvantnih teorija polja, L ima velike vrijednosti, za koje je teorija gravitacije slabo zakrivljena, pa stoga uključuje samo slabu gravitaciju (pri velikim vrijednostima g za kvantnu teoriju). Suprotno tome, kada je teorija kvantnog polja slabo povezana (pri malim vrijednostima g), teorija gravitacije ima vrlo malo L i snažno je povezano u smislu da su korekcije kvantne gravitacije važne (koje je teško izračunati, čak i u teoriji struna). Ova vrsta dualnosti, između snažno povezane teorije s jedne strane i slabo povezane teorije s druge, zapravo je uobičajena osobina u fizičkim teorijama. Dodatno iznenađenje je da jedna od teorija uključuje kvantnu gravitaciju u drugačijoj dimenziji.

Ova dualnost je do danas imala dvije vrste upotrebe. Očigledna upotreba je da daje definiciju kvantne gravitacije u smislu normalne teorije polja za određene vrste gravitacijske pozadine. Druga upotreba, koja se pokazala ko-

[5]Nazvan po profesoru Willem de Sitter koji je surađivao sa Einstein-om na prostorno-vremenskoj strukturi svemira. Prostor Anti de Sitter općenito generira bilo koji broj dimenzija prostora. U višim dimenzijama najpoznatiji je po tome što sugerira da je moguće opisati silu u kvantnoj mehanici u određenom broju dimenzija sa teorijom struna gdje strune postoje u Anti-de Sitter prostoru, sa jednom dodatnom dimenzijom.

risnijom, je ta što daje praktičan način računanja u klasama snažno povezanih teorija kvantnog polja: može se koristiti njihov slabo zakrivljeni gravitacijski dual da bi se izračunale dualne veličine u teoriji gravitacije.

U najjednostavnijem primjeru dualnosti, jedna od teorija opisuje strune koje se šire u imaginarnom prostor-vremenu koji ima oblik kruga radijusa R, dok druga teorija opisuje strune koje se šire u prostor-vremenu oblika kruga radijusa 1 / R. Najpoznatija karakteristika dualnosti nazvana je ***T-dualnost*** i predstavlja naznaku da strune geometriju prostor–vremena vide različito na malim udaljenostima. Teorije sa kompaktnim radijusom iz intervala $0 \leq R \leq \alpha'^{1/2}$ ekvivalentne su teorijama s $R \geq \alpha'^{1/2}$. Veličina α' je povezana sa kvadratom dužine strune. To znači da je minimalni kompaktni radijus usporediv sa dužinom strune. Odnosno, dužina strune je određena minimalnim kompaktnim radijusom.



Slika 10. Ilustracija T-dualnosti

Fizičari se nadaju da bi takva istraživanja snažno spojenih teorija kvantnog polja zasnovanih na gravitacijskim dualnostima mogla pružiti uvid u mnoge centralne probleme: pravilno razumijevanje ograničavanja kvarka u QCD-u, sposobnost izračunavanja transporta u snažno povezanoj QCD plazmi, razumijevanje brojnih kvantnih faznih prelaza nulte temperature u određenim sistemima i slično. Međutim, potrebno je napomenuti da, iako je ovaj novi pristup ortogonalan starijim pristupima i obećava mnogo toga u raznim modelima tih sistema, još uvijek nije pomogao u rješavanju nijednog od glavnih problema.

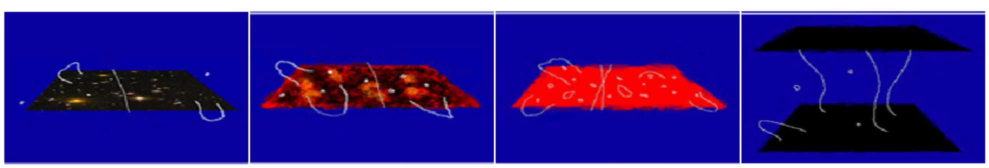
5 INFLACIJA U TEORIJI STRUNA

Teorije o kosmičkoj inflaciji tvrde da je svemir pretrpio strahovito eksplozivno širenje znatno prije nego što je nastupilo posljednje rasipanje fotona. U tom kratkom periodu svemir se proširio za faktor od najmanje 10^{25}. Inflacija bi na taj način širila čestice izvorno u termalnom kontaktu sa malog područja veličine nekoliko reda veće od Planckove dužine, u područje dovoljno veliko da bude površina od posljednjeg raspršenja. U opštoj relativnosti, inflacija zahtijeva izvor gustine energije koja se ne udaljava kako se svemir širi. Ali, izmjerena vrijednost današnje brzine širenja znači da je kosmološka konstanta mogla biti samo mali dio energetskog proračuna svemira u vrijeme Velikog praska. Dakle, nije imala nikakve veze s ovom eksplozivnom ekspanzijom. Međutim, mogao je postojati i drugi izvor konstantne gustine energije: ne baš kosmološka konstanta, već nešto što oponaša jedan izvor u kratkom periodu od nekoliko miliona Planckovih vremena (10^{-44} sekunde). To je moguće ako postoji nova elementarna čestica, ***inflaton*** i njegovo pridruženo skalarno polje.

Znamo da kosmološka konstanta uzrokuje ubrzano (eksponencijalno) širenje svemira. Kako se inflacija događa, polako će se kretati u svom potencijalu dok se svemir eksponencijalno širi. Na kraju, dostiže regiju potencijala u kojoj ta ravnost više nema konfiguraciju. Kako doseže osnovno stanje, oscilacije rezultiraju stvaranjem kvarkova i leptona (Standardnog modela) putem slabih interakcija koje ih spajaju sa inflatonom. Ovaj kraj inflacije, kada se energija pohranjena u polju inflacije ubaci u kvarkove i leptone, je ono što znamo kao Veliki prasak. Gravitacija je pojačala početne malene fluktuacije gustine da bi se stvorila nespretna astrofizika modernog doba. Odakle nastaju ove malene fluktuacije gustine? U teoriji inflacije, vrući gas Velikog praska nastaje zbog oscilacija i raspadanja samog polja inflacije. Stoga se mora pronaći izvor malih fluktuacija ili razlika u putanji inflacije do njenog minimuma, u različitim tačkama prostora. Teorije inflacije jednostavno zahtijevaju skalarno polje s prikladnim potencijalom i dobrom motivacijom za postojanje tog skalara te izvođenje tog potencijala. Moderne supersimetrične teorije fizike čestica i njihovo potpunije ugrađivanje u jedinstvene okvire poput teorije struna obično pružaju za rezultat obilna skalarna polja.

5.1 Modeli inflacije

Budući da je inflacija osjetljiva na korekcije, fizičari moraju ili dati snažne pretpostavke o fizici Planckove skale ili predložiti i izračunati modele inflacije u teorijama gdje mogu upotrijebiti takve efekte gravitacije. Teorija struna predviđa jednu klasu teorija kvantne gravitacije dovoljno razvijenu da ponudi konkretne i testirane modele inflacije. Sabijanje struna od 10 dimenzija do 4 dimenzije često proizvodi zanimljiva skalarna polja. Neka od tih polja pružaju intrigantne inflatorne kandidate. Možda najbolje proučavane klase modela uključuju p-brane onakve kakve su ranije opisane u ovom djelu. Dakle, ukratko ću opisati ovu klasu modela. Zamislite kosmologiju svemira koja uključuje kompaktifikaciju teorije struna, uvijajući šest dodatnih dimenzija kako bi se dobio 4D svijet. Baš kao što se vjeruje da je vrući gas Velikog praska u najranijim vremenima sadržavao čestice i anti-čestice, isto tako se pretpostavlja da su i brane i anti-brane možda postojale u podešavanju struna, obje su p-dimenzionalni hiperplanski objekti na kojima mogu završiti strune, ali nose suprotne naboje ispod nekih viših dimenzija analogno elektromagnetizmu.



Slika 11. Brana i antibrana se kreću jedna prema drugoj i njihov sudar bi mogao uzrokovati inflaciju i Veliki prasak

Najlakše vizualizirani slučaj uključuje 3-brane i 3-antibrane koje ispunjavaju naše 4D prostor-vrijeme, ali koji se nalaze na različitim tačkama u ostalih šest dimenzija. Baš kao što se elektroni i pozitroni privlače međusobno, brane i antibrane privlače jedna drugu putem gravitacionih sila kao i drugih sila pod kojima su naelektrisane. Međutim, zakon o sili nije baš poznat. U najjednostavnijem slučaju, sila opadne za $1/r^4$, gdje je r udaljenost koja razdvaja branu i anti-branu u kompaktnom 6D prostoru. Postoje modeli koji mogu proizvesti sporu inflaciju. Inflatonsko polje kontrolira razdvajanje između brane i anti-brane. Svaka od brana, kao objekat koji ispunjava naš 4D prostor, ima napetost i proizvodi gustoću energije te tako popunjava sav prostor. Dakle, tačniji izraz potencijala brane bio bi $V(r) \approx 2T_3 - 1/r^4$, gdje je T_3

napetost brane. Za dovoljno velike r i sporo kotrljajuće brane, termin $2T_3$ dominira gustinom energije svemira i služi kao efektivna kosmološka konstanta koja pokreće inflaciju. Kako se brane približavaju jedna drugoj $r \approx l_{string}$, slika se ruši. To je zato što određene otvorene strune, sada sa jednim krajem na svakoj brani, za razliku od struna sa oba kraja na jednoj brani, mogu postati lagane.

Suprotno tome, kada je $r >> l_{string}$, tako otvorene strune moraju se rastezati na velikoj udaljenosti i prilično su teške. Energija ili masa strune mjeri se njenom dužinom pa u režimu u kojem je r vrlo mali, a otvorena struna postaje lagana, slika se u smislu pokretnih brana raspada. Umjesto toga, neke lagane otvorene strune posreduju u procesu nestabilnosti konfiguracije brane. U neobrađenoj aproksimaciji, brane i antibrane se jednostavno poništavaju (anihiliraju se, baš kao što bi to činili elektron i anti-elektron), oslobađajući svu gustinu energije koja je pohranjena u napetosti brane u obliku radijacije zatvorene strune. Kod ove vrste modela, Veliki prasak je povezan sa anihilacijom brane sa anti-branom u ranom svemiru.

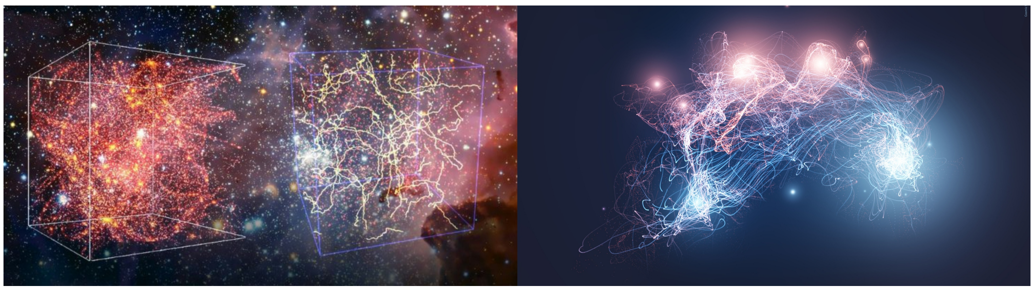
5.2 Ostale posljedice inflacije

Svaki dobro konstruisan model kosmičke inflacije ima popis posljedica koje mogu uključivati i observable koje prelaze preko fluktuacije gustine u mikrotalasnoj pozadini kao rezultat inflacije. Spomenuti ću neke od najspektakularnijih mogućih posljedica:

1) ***Kvantne oscilacije***: Energetska skala inflacije nije poznata direktno iz podataka. U mnogim najjednostavnijim teorijama je ta energetska skala vrlo visoka, blizu je Velike ujedinjene teorijske skale od 10^{16} GeV. Zato je sasvim moguće da inflacija sadrži energije 13 redova veće nego što možemo vidjeti u LHC-u. Prethodno spomenute fluktuacije gustine poticale su iz kvantnih oscilacija samog polja inflatona. Ali, tijekom inflacije, kvantne oscilacije potiču i iz ostalih prisutnih polja, uključujući gravitacijsko polje. Budući kosmološki eksperimenti koji bi istraživali te pojave mogli bi spustiti razinu inflacije na samo nekoliko redova veličine Planckove skale.

2) ***Kosmičke strune***: Vrlo specifični modeli često dolaze s vlastitim potpisima. Jedan od primjera je klasa spekulativnih modela izgrađena na temelju sporog privlačenja i eventualnog poništavanja 3-brane i 3-antibrane. Pro-

ces anihilacije uključuje dinamiku otvorenih struna koje se protežu između 3-brane i 3-antibrane i koje na kraju "kondenziraju". Ovaj proces kondenzacije stvara kosmičke strune dok se brane anihiliraju, što se može smatrati 1-branom ili čak temeljnim strunama koje omotavaju naše 4D prostor-vrijeme i koje su prerasle u makroskopsku veličinu.



Slika 12. Simulacija raspodjele kosmičkih struna tijekom evolucije svemira. Ukoliko postoje, otkriće kosmičkih struna bilo bi mnogo teže

Ako su ove kosmičke strune koje nose napetost doista stvorene na kraju inflacije, one bi trebale biti prisutne u svemiru danas, sa potpisima u eksperimentima koji proučavaju raspodjelu materije kroz gravitacijsko sočivo. Budući eksperimenti bi trebali isključiti prisutnost takvih struna ili ih otkriti zbog širokog raspona vrijednosti moguće skale inflacije.

6 ZAKLJUČAK

Teorija struna se temelji na pretpostavci da se svijet sastoji od jednodimenzionalnih niti koje su nazvane kvantne strune. Sva materija i sve prirodne sile svrstane su zajedno u skupinu vibrirajućih struna. Za takve eksperimente trebalo bi izgraditi akcelerator veličine galaksije. Teorija opstaje dugo i kroz historiju se mijenjala od prve verzije nazvane teorija bozonskih struna preko teorije supersimetrije koja je počela smanjivši broj dimenzija sa 26 na 10 do teorije svega nazvane M-teorija. Prve jednačine teorije struna dale su čudne rezultate. Pojavili su se tahioni i tu je dobro došla ideja o više dimenzija. Matematika prve teorije struna imala je smisla samo ako je bilo 26 dimenzija u našem svemiru. Kasnije je teorija zagovarala da postoji 11 dimenzija - deset prostornih i jedna vremenska. Ako se to ne prihvati, onda se kao rezultati dobivaju neke nelogične, apsurdne vrijednosti. Ali ako je tako, zašto ne vidimo dodatne dimenzije? Odgovor je jednostavan - premale su. Iz daleka, trodimenzionalni objekt će se činiti ravnim. Teško je doći do potpunog zaključka jer je teorija struna mnogo šire i bogatije područje istraživanja, a ovaj rad opisuje samo jedan mali dio toga. Ukratko, na osnovu rada, može se navesti sljedeće: Osnova na kojoj se gradi je teorija gravitacije i kvantna fizika. Potraga za gravitonom je bila glavna motivacija u teoriji struna, a moguća je upravo preko kvantizacije i spektra zatvorene strune. Zatim, teorija lako objašnjava prijelaz dužine u masu. Najuvjerljivija činjenica u vezi teorije struna jest da tako jednostavna ideja zapravo funkcioniše – moguće je izvesti Standardni model iz teorije struna. Najpoznatija karakteristika je zahtjev za dodatnim dimenzijama prostor–vremena što se, možda, čini kao nedostatak teorije, međutim, pri pokušaju da se broj dimenzija smanji, teorija struna otkriva svojstvo dualnosti. Daje svoj doprinos u modelima kosmičke inflacije i nastanka svemira, preko kvantne gravitacije i teorije svega predviđa šta se u njemu događa i kakav će biti njegov kraj.

Ali teorija struna nije dokazana eksperimentalno, njena postignuća ostaju na papiru. Sve više iznenađuje činjenica da je fizičari još uvijek nisu napustili - ima ogroman potencijal. Fizičari prvo predviđaju, a zatim pretražuju. Higgsov bozon predviđen je 50 godina prije otkrića. Uprkos nedostacima, teorija struna pruža čudesne mogućnosti posmatranja svemira na potpuno drugačije načine. A kako to u životu obično biva, za svaku situaciju potrebna je sposobnost da se stvari posmatraju iz različitih uglova.

LITERATURA

[1] Gerard 't Hooft, *Introduction to String Theory*, Institute for Theoretical Physics, Utrecht University, 2004.

[2] Andrea Cappelli, Elena Castellani, Filippo Colomo, Paolo Di Vecchia, *The birth of string theory*, Cambridge University Press, 2012.

[3] H. Itoyama, *Birth of String Theory*, arXiv:1604.03701v2 [hep-th], 2016.

[4] J. Polchinski, *What is String Theory*, Institute for Theoretical Physics, University of California, arXiv:hep-th/9411028v1, 1994.

[5] Nicolas Deutschmann, *Compact Extra Dimensions in Quantum Mechanics*, arXiv:1611.01026 [physics.gen-ph], 2017.

[6] Abdel Pérez-Lorenzana, *An Introduction to Extra Dimensions*, J.Phys.Conf.Ser. 18 224, 2005.

[7] B.Zwiebach, *A First Course in String Theory*, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge University Press, 2004.